

Под редакцией  
Ф.Ф. Лысенко,  
С.Ю. Кулабухова

ОГЭ

# МАТЕМАТИКА

ЭКСПРЕСС-ПОДГОТОВКА • ОГЭ-2016



**9**  
КЛАСС

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ  
ЗАДАНИЯ 1-20



**Учебно-методический комплекс  
«Математика. Подготовка к ОГЭ»**

**Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова**

**МАТЕМАТИКА**  
**БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ОГЭ-2016**  
**9 КЛАСС**  
**ЭКСПРЕСС-ПОДГОТОВКА**



**ЛЕГИОН**  
**Ростов-на-Дону**  
**2015**

ББК 22.1

М 34

Рецензенты:

*Евич Л. Н.* — кандидат физико-математических наук, доцент

*Иванова Л. Л.* — заслуженный учитель РФ

**Авторский коллектив:**

Иванов С. О., Войта Е. А., Коннова Е. Г., Нужа Г. Л., Ольховая Л. С.,  
Резникова Н. М., Ханин Д. И.

**М 34 Математика. Базовый уровень ОГЭ-2016. 9 класс. Экспресс-подготовка / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2015. — 384 с. — (ОГЭ).**

ISBN 978-5-9966-0775-4

Материал, представленный в этой книге, предназначен для формирования устойчивых навыков в решении задач базового уровня сложности на ОГЭ по математике. Воспользовавшись пособием, можно развить навыки безошибочного решения заданий первой части предстоящего экзамена и сэкономить время для решения более сложных задач.

Пособие разбито на модули в соответствии со структурой экзаменационной работы: алгебра, геометрия, реальная математика. Каждый модуль разбит на главы, включающие в себя необходимую теоретическую информацию, разбор решений типовых задач, а также варианты для самостоятельного решения. Кроме того, в конце каждого модуля приведено 10 обобщающих тренировочных тестов, включающих задания по всем темам, рассмотренным в модуле.

Предлагаемое издание адресовано учащимся 9-х классов общеобразовательных учреждений и учителям математики.

Книга является частью учебно-методического комплекса «Математика. Подготовка к ОГЭ».

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0775-4

© ООО «Легион», 2015

# Оглавление

От авторов ..... 5

## **Модуль 1. Алгебра** **11**

Глава 1. Числа и вычисления ..... 12

Глава 2. Алгебраические выражения ..... 47

Глава 3. Уравнения и неравенства ..... 61

Глава 4. Числовые последовательности ..... 88

Глава 5. Графики и функции ..... 100

Тренировочные тесты к модулю 1 «Алгебра» ..... 126

## **Модуль 2. Геометрия** **146**

Глава 6. Базовые понятия и треугольник ..... 147

Глава 7. Многоугольники ..... 180

Глава 8. Окружность и круг ..... 196

Глава 9. Векторы и координаты ..... 217

Тренировочные тесты к модулю 2 «Геометрия» ..... 226

<b>Модуль 3. Реальная математика</b>	<b>248</b>
Глава 10. Графическое и табличное представление информации .....	249
Глава 11. Практическая геометрия .....	270
Глава 12. Текстовые задачи .....	294
Глава 13. Действия с формулами .....	309
Глава 14. Теория вероятностей .....	314
Глава 15. Статистика .....	320
Тренировочные тесты к модулю 3 «Реальная математика» .....	340
Ответы к вариантам для самостоятельного решения .....	367
Ответы к тренировочным тестам .....	374

## От авторов

Материал, представленный в этой книге, предназначен для **формирования устойчивых навыков в решении задач базового уровня сложности** на ОГЭ по математике. Воспользовавшись пособием, можно развить навыки безошибочного решения заданий первой части предстоящего экзамена и сэкономить время для решения более сложных задач. Пособие предназначено для подготовки девятиклассников к основному государственному экзамену и будет полезно в течение всего учебного года.

Пособие разбито на модули в соответствии со структурой экзаменационной работы: алгебра, геометрия, реальная математика. Каждый модуль разбит на главы, включающие в себя

- краткий теоретический минимум;
- разбор решений типовых задач, подобные которым учащимся предстоит выполнять на экзамене;
- варианты для самостоятельного решения.

Каждый вариант для самостоятельного решения рассчитан на выполнение в течение 20 – 30 минут.

В конце каждого модуля приведены **10 обобщающих тренировочных тестов**, включающих задания по всем темам, рассмотренным в модуле. Каждый такой тест рекомендуется выполнять в течение 40 – 45 минут, затем проверить правильность решения с помощью ответов, приведённых в конце пособия. Если ответы не совпадут, следует ещё раз решить задачу, а при необходимости найти подобную среди разобранных примеров.

Книга «Математика. Базовый уровень ОГЭ-2016. Экспресс-подготовка» входит в учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ОГЭ», выпускаемый издательством «Легион».

**Книги издательства «Легион» для подготовки к ОГЭ по математике:**

Пособие	Задания по темам	Варианты ОГЭ	Теория	Решения	Уровень сложности*
Математика. ОГЭ-2016. 9 класс. Тематический тренинг	+++		++	+	БПВ
Математика. 9 класс. Подготовка к ОГЭ-2016. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год		+++	++	+	БПВ
Математика. Решебник с методическими рекомендациями. 9 класс. Подготовка к ОГЭ-2016.				+++	ПВ
Математика. Базовый уровень ОГЭ-2016. 9 класс. Экспресс-подготовка	++		++	++	Б
Математика. 9 класс. ОГЭ-2016. Тренажёр для подготовки к экзамену. Алгебра, геометрия, реальная математика	+++				Б
Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА. Задания с параметром: теория, методика, упражнения и задачи	++		++	++	ПВ
Геометрия. 9 класс. Задачи ОГЭ с развёрнутым ответом	++		++	++	ПВ

\*Б — базовый, П — повышенный, В — высокий уровень сложности

Перечислим и кратко охарактеризуем книги, входящие в комплекс «Математика. Подготовка к ОГЭ», выпускаемый издательством «Легион»:

- Математика. ОГЭ-2016. 9 класс. Тематический тренинг.  
*Книга содержит 27 тематических параграфов по всему материалу, традиционно включаемому в ОГЭ. Каждый параграф содержит краткие теоретические сведения, демонстрационный вариант, задания которого приводятся с пояснениями и решениями, и 6 вариантов для самостоятельного решения.*
- Математика. 9 класс. Подготовка к ОГЭ-2016. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год.  
*Сборник авторских тестов, составленных по последней спецификации ОГЭ, дополняет книгу «Математика. ОГЭ-2016. 9 класс. Тематический тренинг».*
- Математика. Решебник с методическими рекомендациями. 9 класс. Подготовка к ОГЭ-2016.  
*Книга содержит подробные решения всех тестовых заданий с развёрнутым ответом и всех задач из раздела «Задачник» пособия «Математика. 9 класс. Подготовка к ОГЭ-2016».*
- Математика. Базовый уровень ОГЭ-2016. 9 класс. Экспресс-подготовка.  
*Настоящая книга*



- Математика. 9 класс. ОГЭ-2016. Тренажёр для подготовки к экзамену. Алгебра, геометрия, реальная математика. *Сборник тренировочных тестовых заданий для формирования устойчивых навыков решения задач базового уровня первой части экзамена. Содержит задания для тематического и обобщающего повторения и тренировочные варианты к каждому параграфу.*
- Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА. Задания с параметром: теория, методика, упражнения и задачи. *Книга посвящена подготовке к одному из сложных заданий экзамена, традиционно включаемому во вторую часть модуля «Алгебра» экзаменационной работы.*
- Геометрия. 9 класс. Задачи ОГЭ с развёрнутым ответом. *Книга предназначена для подготовки к планиметрическим задачам с развёрнутым ответом, неизменно присутствующим в экзаменационной работе для девятиклассников. Содержит краткую теорию, рекомендации по оцениванию решения, задачи, подобные предлагаемым на ОГЭ, и их подробные решения.*

### **Методика работы с комплексом «Математика. Подготовка к ОГЭ»**

Подготовку к ОГЭ следует начинать с пособий «Математика. ОГЭ-2016. 9 класс. Тематический тренинг» и «Математика. 9 класс. ОГЭ-2016. Тренажёр для подготовки к экзамену. Алгебра, геометрия, реальная математика». Оба эти пособия могут использоваться в течение всего учебного года, а способ организации процесса обучения зависит от пре-

подавателя. Например, используя тренажёр, учащиеся могут выполнить на уроке большое число заданий базового уровня сложности по определённой теме или по различным темам. Книгу «Математика. ОГЭ-2016. 9 класс. Тематический тренинг» можно использовать для домашних работ, для организации диагностики и контроля (самоконтроля), а также при изучении методов решения задач повышенного уровня сложности.

При работе со слабо подготовленными обучающимися следует также обратиться к пособию «Математика. Базовый уровень ОГЭ-2016. 9 класс. Экспресс-подготовка». В нём простым языком изложены необходимая теория и методы решения задач базового уровня ОГЭ. Разбор предлагаемого материала можно проводить как в классе, так и оставлять школьникам для самостоятельного изучения при организации повторения (в том числе повторения материала, пройденного в предыдущие годы).

Сборник тестов «Математика. 9 класс. Подготовка к ОГЭ-2016. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год» следует использовать после освоения большей части материала из рассмотренных выше пособий. Предлагаемые в нём тренировочные варианты в формате ОГЭ могут использоваться для разбора варианта в классе и оставления парного варианта школьникам в качестве домашней работы, а могут — и для проведения репетиции экзамена или для организации диагностики и контроля.

К указанному сборнику тестов отдельно издаётся решебник с подробными пояснениями и методическими рекомендациями, который может использоваться как преподавателем

лем — для разбора решений заданий повышенного и высокого уровней сложности, так и учащимся при самостоятельной подготовке.

К последним двум пособиям комплекса — «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА. Задания с параметром: теория, методика, упражнения и задачи» и «Геометрия. 9 класс. Задачи ОГЭ с развёрнутым ответом» — следует переходить после окончания основной части подготовки, соответственно, освоения алгебры и геометрии на базовом уровне. Работу с данными книгами можно организовать в классах с подготовленными учащимися либо рекомендовать эти пособия для самостоятельной подготовки наиболее успевающим.

Обсудить пособия, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на официальных форумах издательства

<http://f.legionr.ru>,

<http://legion-posobiya.livejournal.com>.

**Модуль 1.**

**Алгебра**

## Глава 1. Числа и вычисления

### Сложение и вычитание чисел

#### ① Немного полезной информации

При сложении (вычитании) натуральных чисел столбиком надо

- подписать одно число под другим так, чтобы единицы были под единицами, десятки — под десятками, сотни — под сотнями и т.д.;
- сложить (вычесть) числа поразрядно, начиная с разряда единиц.

#### ⚡ Задачи с решениями

1. Выполните действие: а)  $346 + 458$ ; б)  $2463 - 378$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{r} 346 \\ + 458 \\ \hline 804 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2463 \\ - 378 \\ \hline 2085 \end{array}$$

*Ответ:* а) 804; б) 2085.

#### ① Немного полезной информации

При сложении (вычитании) десятичных дробей надо

- уравнивать в этих дробях количество знаков после запятой;
- записать числа друг под другом так, чтобы запятая была под запятой;
- выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
- поставить в ответе запятую под запятой в данных дробях.

### 8 — Задачи с решениями

2. Выполните действие: а)  $13,28 + 5,145$ ; б)  $3,6 - 1,551$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{r} \text{а) } + \quad 13,280 \\ \quad \quad 5,145 \\ \hline \quad \quad 18,425 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{б) } - \quad 3,600 \\ \quad \quad 1,551 \\ \hline \quad \quad 2,049 \end{array}$$

*Ответ:* а) 18,425; б) 2,049.

3. Выполните действие: а)  $24,2 + 0,867$ ; б)  $448,32 - 51,435$ ;  
в)  $451 - 2,553$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{r} \text{а) } + \quad 24,200 \\ \quad \quad 0,867 \\ \hline \quad \quad 25,067 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{б) } - \quad 448,320 \\ \quad \quad 51,435 \\ \hline \quad \quad 396,885 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{в) } - \quad 451,000 \\ \quad \quad 2,553 \\ \hline \quad \quad 448,447 \end{array}$$

*Ответ:* а) 25,067; б) 396,885; в) 448,447.

### ① Немного полезной информации

При сложении (вычитании) обыкновенных дробей надо

- привести дроби к наименьшему общему знаменателю;
- сложить (вычесть) числители, результат записать в числитель;
- в знаменатель записать найденный наименьший общий знаменатель.

**8** — Задачи с решениями

4. Выполните действие: а)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$ ; б)  $\frac{11}{30} - \frac{7}{20}$ .

*Решение.*

а) Приведём дроби  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{3}{5}$  к наименьшему общему знаменателю. Для этого умножим числители и знаменатели этих дробей на дополнительные множители 5 и 3 соответственно:

$$\frac{2^5}{3} + \frac{3^3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{10+9}{15} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{15}.$$

б) Приведём дроби  $\frac{11}{30}$  и  $\frac{7}{20}$  к наименьшему общему знаменателю. Для этого умножим числители и знаменатели этих дробей на дополнительные множители 2 и 3 соответственно:

$$\frac{11^2}{30} - \frac{7^3}{20} = \frac{22}{60} - \frac{21}{60} = \frac{22-21}{60} = \frac{1}{60}.$$

*Ответ:* а)  $1\frac{4}{15}$ ; б)  $\frac{1}{60}$ .

5. Выполните действие  $\frac{13}{18} + \frac{11}{24}$ .

*Решение.*

Для приведения исходных дробей к наименьшему общему знаменателю найдём НОК (наименьшее общее кратное) чисел 18 и 24. Разложим 18 и 24 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Отсюда НОК(24; 18) =  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$ .

$$\frac{13^4}{18} + \frac{11^3}{24} = \frac{13 \cdot 4}{72} + \frac{11 \cdot 3}{72} = \frac{52 + 33}{72} = \frac{85}{72} = 1\frac{13}{72}.$$

Ответ:  $1\frac{13}{72}$ .

6. Выполните действия  $\left(\frac{7}{15} + \frac{1}{4}\right) - \frac{2}{15}$ .

Решение.

Для упрощения вычислений поменяем местами  $\frac{1}{4}$  и  $\left(-\frac{2}{15}\right)$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{7}{15} + \frac{1}{4}\right) - \frac{2}{15} &= \left(\frac{7}{15} - \frac{2}{15}\right) + \frac{1}{4} = \frac{5}{15} + \frac{1}{4} = \frac{1^4}{3} + \frac{1^3}{4} = \\ &= \frac{4 + 3}{12} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{7}{12}$ .

7. Выполните действие  $5\frac{8}{9} - 2\frac{1}{6}$ .

$$5\frac{8^2}{9} - 2\frac{1^3}{6} = 5\frac{16}{18} - 2\frac{3}{18} = 3\frac{13}{18}.$$

Ответ:  $3\frac{13}{18}$ .



### ① Немного полезной информации

Модуль числа  $a$ :

$$|a| = a, \text{ если } a \geq 0,$$

$$|a| = -a, \text{ если } a < 0.$$

Например:  $|10| = 10$ ;  $|0| = 0$ ;  $|-1,5| = 1,5$ .

### 8 — Задачи с решениями

8. Вычислите: а)  $|-7| + |-4|$ ; б)  $|12| - |-3|$ .

*Решение.*

$$\text{а) } |-7| + |-4| = 7 + 4 = 11;$$

$$\text{б) } |12| - |-3| = 12 - 3 = 9.$$

*Ответ:* а) 11; б) 9.

### ① Немного полезной информации

При сложении отрицательных чисел надо

- поставить перед полученным числом знак минус;
- сложить их модули.

### 8 — Задачи с решениями

9. Выполните сложение: а)  $-10 + (-13)$ ;

$$\text{б) } -2\frac{1}{5} + \left(-3\frac{1}{15}\right); \text{ в) } -0,75 + (-1,25).$$

*Решение.*

$$\text{а) } -10 + (-13) = -(10 + 13) = -23.$$

$$\text{б) } -2\frac{1}{5} + \left(-3\frac{1}{15}\right) = -\left(2\frac{1}{5} + 3\frac{1}{15}\right) = -\left(2\frac{3}{15} + 3\frac{1}{15}\right) = -5\frac{4}{15}.$$

$$\text{в) } -0,75 + (-1,25) = -(0,75 + 1,25) = -2.$$

*Ответ:* а)  $-23$ ; б)  $-5\frac{4}{15}$ ; в)  $-2$ .

**① Немного полезной информации**

При сложении чисел с разными знаками надо

- поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше;
- из большего модуля слагаемых вычесть меньший.

**☞ Задачи с решениями**

10. Выполните сложение: а)  $28 + (-14)$ ; б)  $-2\frac{2}{7} + 4\frac{5}{7}$ ;

в)  $2,4 + (-5,8)$ .

*Решение.*

$$\text{а) } 28 + (-14) = 28 - 14 = 14.$$

$$\text{б) } -2\frac{2}{7} + 4\frac{5}{7} = 4\frac{5}{7} - 2\frac{2}{7} = 2\frac{3}{7}.$$

$$\text{в) } 2,4 + (-5,8) = -(5,8 - 2,4) = -3,4.$$

*Ответ:* а) 14; б)  $2\frac{3}{7}$ ; в) -3,4.

**① Немного полезной информации**

При вычитании чисел надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

**☞ Задачи с решениями**

11. Выполните вычитание: а)  $-18 - 12$ ; б)  $17 - 48$ ;

в)  $10 - (-2)$ .

*Решение.*

$$\text{а) } -18 - 12 = -18 + (-12) = -(18 + 12) = -30.$$

$$\text{б) } 17 - 48 = 17 + (-48) = -(48 - 17) = -31.$$

$$\text{в) } 10 - (-2) = 10 + 2 = 12.$$

*Ответ:* а)  $-30$ ; б)  $-31$ ; в)  $12$ .

12. Выполните вычитание  $7 - 2\frac{5}{13}$ .

*Решение.*

Заметим, что уменьшаемое — целое число. Чтобы выполнить вычитание, надо

- занять единицу в целой части уменьшаемого ( $7 = 6 + 1$ );
- представить эту единицу в виде неправильной дроби, знаменатель которой равен знаменателю дробной части вычитаемого ( $6 + \frac{13}{13} = 6\frac{13}{13}$ );
- отдельно выполнить вычитание целых частей и отдельно дробных частей.

$$6\frac{13}{13} - 2\frac{5}{13} = (6 - 2) + \left(\frac{13}{13} - \frac{5}{13}\right) = 4\frac{8}{13}.$$

*Ответ:*  $4\frac{8}{13}$ .

13. Выполните вычитание  $6\frac{7}{15} - \frac{13}{20}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} 6\frac{7}{15} - \frac{13}{20} &= 6\frac{28}{60} - \frac{39}{60} = \left(5 + 1 + \frac{28}{60}\right) - \frac{39}{60} = \\ &= \left(5 + \frac{60}{60} + \frac{28}{60}\right) - \frac{39}{60} = 5\frac{88}{60} - \frac{39}{60} = 5\frac{49}{60}. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $5\frac{49}{60}$ .

## Умножение и деление чисел

## ① Немного полезной информации

		×	4	8	1		
				2	6		
	+	2	8	8	6		
		9	6	2			
	1	2	5	0	6		

Рис. 1

*Пояснение.*

1. Подпишем одно число под другим так, чтобы единицы были под единицами, десятки — под десятками.
2. Находим первое неполное произведение:  $481 \cdot 6 = 2886$ .
3. Находим второе неполное произведение:  $481 \cdot 2 = 962$ .  
Пишем второе неполное произведение под первым неполным произведением, сдвинув второе на один знак влево. (Разряд единиц второго неполного произведения должен находиться под разрядом десятков первого.)
4. Сложим неполные произведения.
5. Читаем ответ (см. рис. 1): произведение чисел 481 и 26 равно 12 506.

## Умножение чисел, оканчивающихся нулями

		×	4	6	5	0	
				3	7	0	0
	+	3	2	5	5		
		1	3	9	5		
	1	7	2	0	5	0	0

Рис. 2

Объясним умножение столбиком на примере: найдём произведение чисел 481 и 26 (рис. 1).

Найдём произведение чисел 4650 и 3700 (рис. 2).

*Пояснение.*

1. Подписываем одно число под другим так, чтобы сотни числа 3700 были под десятками числа 4650 (то есть нули остаются «в стороне»).
2. Выполняем умножение, не обращая внимания на нули (то есть умножаем 465 и 37).
3. Складываем неполные произведения.
4. В обоих множителях считаем число нулей на конце числа: в числе 4650 — 1 ноль, в числе 3700 — 2 нуля. Всего 3 нуля, приписываем их к 17 205 (найденной сумме неполных произведений), получаем число 17 205 000.
5. Читаем ответ (см. рис. 2): произведение чисел 4650 и 3700 равно 17 205 000.

**8** *Задачи с решениями*

14. Найдите значение выражения: а)  $45 \cdot 83$ ; б)  $1730 \cdot 8200$ ; в)  $185 \cdot 203$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{r} \text{а) } \quad \times \quad 45 \\ \quad \times \quad 83 \\ \hline \quad 135 \\ + \quad 360 \\ \hline \quad 3735 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \quad \times \quad 1730 \\ \quad \times \quad 8200 \\ \hline \quad 346 \\ + \quad 1384 \\ \hline 14186\,000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } \quad \times \quad 185 \\ \quad \times \quad 203 \\ \hline \quad 555 \\ + \quad 370 \\ \hline 37555 \end{array}$$

*Ответ:* а) 3735; б) 14 186 000; в) 37 555.

## Умножение десятичных дробей

### ① Немного полезной информации

При умножении десятичных дробей надо

- выполнить умножение, не обращая внимания на запятые;
- отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе. (Если в произведении получается меньше цифр, чем надо отделить запятой, то впереди пишут нуль или несколько нулей.)

### ⚡ Задачи с решениями

15. Выполните умножение: а)  $0,143 \cdot 0,02$ ; б)  $23 \cdot 0,004$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{r} \text{а) } \times \quad 0,143 \\ \quad \quad 0,02 \\ \hline 0,00286 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{б) } \times \quad 23 \\ \quad \quad 0,004 \\ \hline 0,092 \end{array}$$

*Ответ:* а) 0,002 86; б) 0,092.

### ① Немного полезной информации

При умножении десятичной дроби на 0,1, 0,01, 0,001, ... надо перенести запятую влево на столько цифр, сколько нулей стоит перед единицей в множителе.

### ⚡ Задачи с решениями

16. Выполните умножение: а)  $31,2 \cdot 0,001$ ; б)  $0,001 \cdot 0,01$ .

*Решение.*

$$\text{а) } 31,2 \cdot 0,001 = 0,0312.$$

$$\text{б) } 0,001 \cdot 0,01 = 0,000 01.$$

*Ответ:* а) 0,0312; б) 0,000 01.

### ① Немного полезной информации

При умножении обыкновенных дробей надо

- найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;
- первое произведение записать на место числителя; второе — на место знаменателя.

### ⚡ Задачи с решениями

17. Выполните умножение: а)  $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{25}$ ; б)  $\frac{5}{16} \cdot 4$ ; в)  $9\frac{3}{5} \cdot 1\frac{7}{12}$ .

*Решение.*

$$\text{а) } \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{25} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 25} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

$$\text{б) } \frac{5}{16} \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4}{16} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

$$\text{в) } 9\frac{3}{5} \cdot 1\frac{7}{12} = \frac{48}{5} \cdot \frac{19}{12} = \frac{48 \cdot 19}{5 \cdot 12} = \frac{76}{5} = 15\frac{1}{5}.$$

*Ответ:* а) 0,1; б)  $1\frac{1}{4}$ ; в)  $15\frac{1}{5}$ .

### ① Немного полезной информации

При умножении двух отрицательных чисел надо перемножить их модули.

### ⚡ Задачи с решениями

18. Выполните умножение: а)  $-2,1 \cdot (-3)$ ; б)  $-3\frac{1}{2} \cdot \left(-2\frac{4}{5}\right)$ .

*Решение.*

$$\text{а) } -2,1 \cdot (-3) = 2,1 \cdot 3 = 6,3.$$

$$б) -3\frac{1}{2} \cdot \left(-2\frac{4}{5}\right) = \frac{7 \cdot 14}{2 \cdot 5} = \frac{98}{10} = 9,8.$$

Ответ: а) 6,3; б) 9,8.

### ① Немного полезной информации

При умножении двух чисел с разными знаками надо

- поставить знак минус;
- перемножить модули этих чисел.

### ☞ Задачи с решениями

19. Выполните умножение: а)  $-2 \cdot 7$ ; б)  $4,7 \cdot (-0,5)$ .

Решение.

$$а) -2 \cdot 7 = -(2 \cdot 7) = -14.$$

$$б) 4,7 \cdot (-0,5) = -(4,7 \cdot 0,5) = -2,35.$$

Ответ: а)  $-14$ ; б)  $-2,35$ .

### Деление чисел «уголком»

### ① Немного полезной информации

	2	7	3	6	4		
	2	4			6	8	4
		3	3				
		3	2				
			1	6			
			1	6			
				0			

Объясним деление «уголком» на примере: найдём частное чисел 2736 и 4 (рис. 3).

Рис. 3



*Пояснение.*

1. Пишем делимое 2736, ставим «уголок» и пишем делитель 4.
2. Определяем первое неполное делимое. 2 на 4 разделить нельзя, берём 27.
3. Делим первое неполное делимое 27 на 4. Ближайшее в сторону убывания число, которое делится на 4 без остатка, — это 24.  
 $24 : 4 = 6$ . Пишем 6 в частное. Далее из 27 вычитаем 24. Получаем остаток 3.
4. Проверяем остаток. Он должен быть меньше делителя:  
 $3 < 4$ , верно.
5. Сносим следующую цифру — 3, получаем 33. Делим второе неполное делимое 33 на 4. Ближайшее в сторону убывания число, которое делится на 4 без остатка, — это 32.  
 $32 : 4 = 8$ . Пишем 8 в частное. Далее из 33 вычитаем 32. Получаем остаток 1.
6. Проверяем остаток:  $1 < 4$ , верно.
7. Сносим следующую цифру — 6, получаем 16. Делим третье неполное делимое 16 на 4,  $16 : 4 = 4$ . Пишем в частном 4. Из 16 вычитаем 16, получаем 0.
8. Читаем ответ: частное чисел 2736 и 4 равно 684 (см. рис. 3).



### 8 — Задачи с решениями

21. Вычислите: а)  $3,28 : 2$ ; б)  $81,27 : 90$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{r} \text{а) } \underline{3,28} \bigg| 2 \\ \underline{2} \phantom{00} \\ \underline{12} \phantom{0} \\ \underline{12} \phantom{0} \\ \underline{\phantom{12}0} \\ \phantom{12}0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \underline{81,27} \bigg| 90 \\ \phantom{00} \underline{0} \phantom{00} \\ \underline{\phantom{00}81} \phantom{2} \\ \phantom{00} \underline{\phantom{00}81} \phantom{0} \\ \phantom{00} \phantom{00} \underline{\phantom{00}27} \phantom{0} \\ \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \underline{\phantom{00}27} \phantom{0} \\ \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \underline{\phantom{00}0} \end{array}$$

*Ответ:* а) 1,64; б) 0,903.

### ① Немного полезной информации

При делении десятичной дроби на 10, 100, 1000, ... надо перенести запятую в этой дроби на столько цифр влево, сколько нулей стоит после единицы в делителе.

При этом иногда необходимо написать перед целой частью нуль или несколько нулей.

22. Выполните деление: а)  $53,7 : 10$ ; б)  $23,41 : 1000$ .

*Решение.*

$$\text{а) } 53,7 : 10 = 5,37.$$

$$\text{б) } 23,41 : 1000 = 0,02341.$$

*Ответ:* а) 5,37; б) 0,02341.



*Решение.*

$$\begin{array}{r}
 \text{а) } \begin{array}{r|l}
 \underline{93,15} & 23 \\
 \underline{92} & 4,05 \\
 \hline
 -115 & \\
 \hline
 115 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array} & 
 \text{б) } \begin{array}{r|l}
 \underline{46080} & 384 \\
 \underline{384} & 120 \\
 \hline
 -768 & \\
 \hline
 768 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array} & 
 \text{в) } \begin{array}{r|l}
 \underline{2902,9} & 2002 \\
 \underline{2002} & 1,45 \\
 \hline
 -9009 & \\
 \hline
 8008 & \\
 \hline
 -10010 & \\
 \hline
 10010 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}
 \end{array}$$

*Ответ:* а) 4,05; б) 120; в) 1,45.**① Немного полезной информации**

При делении обыкновенных дробей надо делимое умножить на число, обратное делителю. (Два числа, произведение которых равно 1, называют взаимно обратными.)

**☞ Задачи с решениями**

25. Выполните деление: а)  $\frac{3}{7} : \frac{6}{13}$ ; б)  $2\frac{2}{5} : 1\frac{1}{15}$ ; в)  $0 : 5\frac{1}{17}$ ;

г)  $\frac{2}{3} : 4$ ; д)  $7 : \frac{2}{5}$ .

*Решение.*

$$\text{а) } \frac{3}{7} : \frac{6}{13} = \frac{3}{7} \cdot \frac{13}{6} = \frac{3 \cdot 13}{7 \cdot 6} = \frac{13}{14}.$$

$$\text{б) } 2\frac{2}{5} : 1\frac{1}{15} = \frac{12}{5} : \frac{16}{15} = \frac{12}{5} \cdot \frac{15}{16} = \frac{12 \cdot 15}{5 \cdot 16} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

$$\text{в) } 0 : 5\frac{1}{17} = 0.$$

$$\text{г) } \frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}.$$

$$д) 7 : \frac{2}{5} = 7 \cdot \frac{5}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}.$$

Ответ: а)  $\frac{13}{14}$ ; б)  $2\frac{1}{4}$ ; в) 0; г)  $\frac{1}{6}$ ; д)  $17\frac{1}{2}$ .

### ① Немного полезной информации

При делении отрицательного числа на отрицательное надо разделить модуль делимого на модуль делителя.

### ☞ Задачи с решениями

26. Выполните деление: а)  $-4,2 : (-6)$ ; б)  $-56 : (-8)$ ;

в)  $-2\frac{1}{5} : \left(-\frac{11}{15}\right)$ .

*Решение.*

а)  $-4,2 : (-6) = 4,2 : 6 = 0,7$ .

б)  $-56 : (-8) = 56 : 8 = 7$ .

в)  $-2\frac{1}{5} : \left(-\frac{11}{15}\right) = \frac{11 \cdot 15}{5 \cdot 11} = 3$ .

Ответ: а) 0,7; б) 7; в) 3.

### ① Немного полезной информации

При делении чисел с разными знаками надо

- поставить знак минус;
- разделить модуль делимого на модуль делителя.

### ☞ Задачи с решениями

27. Выполните деление: а)  $45 : (-15)$ ; б)  $-2,8 : 0,04$ ;

в)  $-3\frac{1}{6} : \frac{19}{36}$ .

*Решение.*

$$а) 45 : (-15) = -(45 : 15) = -3.$$

$$б) -2,8 : 0,04 = -(2,8 : 0,04) = -(280 : 4) = -70.$$

$$в) -3\frac{1}{6} : \frac{19}{36} = -\frac{19 \cdot 36}{6 \cdot 19} = -6.$$

*Ответ:* а)  $-3$ ; б)  $-70$ ; в)  $-6$ .

## Величины

### ① Немного полезной информации

Мы рассмотрели действия над числами. Следует привести примеры действий над величинами.

Вспомним соотношение некоторых величин.

*Единицы массы*

$$1 \text{ т} = 1000 \text{ кг}$$

$$1 \text{ ц} = 100 \text{ кг}$$

$$1 \text{ кг} = 1000 \text{ г}$$

$$1 \text{ г} = 1000 \text{ мг}$$

*Единицы времени*

$$1 \text{ ч} = 60 \text{ мин}$$

$$1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$$

$$1 \text{ сут.} = 24 \text{ ч}$$

*Единицы длины*

$$1 \text{ км} = 1000 \text{ м}$$

$$1 \text{ м} = 10 \text{ дм}$$

$$1 \text{ м} = 100 \text{ см}$$

$$1 \text{ дм} = 10 \text{ см}$$

$$1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$$

*Единицы площади*

$$1 \text{ м}^2 = 10\,000 \text{ см}^2$$

$$1 \text{ га} = 10\,000 \text{ м}^2$$

$$1 \text{ га} = 100 \text{ а}$$

$$1 \text{ а} = 100 \text{ м}^2$$

### 🔗 Задачи с решениями

28. Переведите в граммы: а) 2 кг 230 г; б) 9 кг 17 г; в) 2 г 300 мг.

*Решение.*

$$а) 2 \text{ кг } 230 \text{ г} = (2 \cdot 1000 + 230) \text{ г} = (2000 + 230) \text{ г} = 2230 \text{ г}.$$

$$\text{б) } 9 \text{ кг } 17 \text{ г} = (9 \cdot 1000 + 17) \text{ г} = (9000 + 17) \text{ г} = 9017 \text{ г.}$$

$$\text{в) } 2 \text{ г } 300 \text{ мг} = 2 \frac{300}{1000} \text{ г} = 2,3 \text{ г.}$$

*Ответ:* а) 2230 г; б) 9017 г; в) 2,3 г.

**29.** Переведите в метры: а) 12 км 48 м; б) 2 км 300 м;  
в) 3 м 5 см.

*Решение.*

$$\text{а) } 12 \text{ км } 48 \text{ м} = (12 \cdot 1000 + 48) \text{ м} = (12\,000 + 48) \text{ м} = 12\,048 \text{ м.}$$

$$\text{б) } 2 \text{ км } 300 \text{ м} = (2 \cdot 1000 + 300) \text{ м} = (2000 + 300) \text{ м} = 2300 \text{ м.}$$

$$\text{в) } 3 \text{ м } 5 \text{ см} = 3 \frac{5}{100} \text{ м} = 3,05 \text{ м.}$$

*Ответ:* а) 12 048 м; б) 2300 м; в) 3,05 м.

**30.** Переведите в минуты: а) 2 ч 30 мин; б) 4 ч 5 мин;  
в) 5 мин 30 с.

*Решение.*

$$\text{а) } 2 \text{ ч } 30 \text{ мин} = (2 \cdot 60 + 30) \text{ мин} = (120 + 30) \text{ мин} = 150 \text{ мин.}$$

$$\text{б) } 4 \text{ ч } 5 \text{ мин} = (4 \cdot 60 + 5) \text{ мин} = (240 + 5) \text{ мин} = 245 \text{ мин.}$$

$$\text{в) } 5 \text{ мин } 30 \text{ с} = 5 \frac{30}{60} \text{ мин} = 5,5 \text{ мин.}$$

*Ответ:* а) 150 мин; б) 245 мин; в) 5,5 мин.



31. Найдите значение выражения.

$$\begin{aligned} \text{а) } & 75 \text{ кг } 300 \text{ г} - 5 \text{ кг } 15 \text{ г} + 150 \text{ г} - 73 \text{ г} = \\ & = 75 \text{ 300 г} - 5015 \text{ г} + 150 \text{ г} - 73 \text{ г} = 70 \text{ 362 г} = 70 \text{ кг } 362 \text{ г}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } & 35 \text{ кг } 410 \text{ г} + 120 \text{ г} - 8 \text{ кг } 15 \text{ г} - 33 \text{ г} = (35 \text{ кг } 410 \text{ г} + 120 \text{ г}) - \\ & - (8 \text{ кг } 15 \text{ г} + 33 \text{ г}) = 35 \text{ кг } 530 \text{ г} - 8 \text{ кг } 48 \text{ г} = 27 \text{ кг } 482 \text{ г}. \end{aligned}$$

32. Выполните действия. Ответ запишите в кг.

$$\text{а) } 3 \text{ кг } 528 \text{ г} + 472 \text{ г} - 2 \text{ кг } 32 \text{ г};$$

$$\text{б) } 57 \text{ кг } 40 \text{ г} + 48 \text{ кг } 200 \text{ г} - 42 \text{ кг } 5 \text{ г}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \text{а) } & 3 \text{ кг } 528 \text{ г} + 472 \text{ г} - 2 \text{ кг } 32 \text{ г} = 3 \frac{528}{1000} \text{ кг} + \frac{472}{1000} \text{ кг} - \\ & - 2 \frac{32}{1000} \text{ кг} = 3,528 \text{ кг} + 0,472 \text{ кг} - 2,032 \text{ кг} = 1,968 \text{ кг}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } & 57 \text{ кг } 40 \text{ г} + 48 \text{ кг } 200 \text{ г} - 42 \text{ кг } 5 \text{ г} = 57,04 \text{ кг} + 48,2 \text{ кг} - \\ & - 42,005 \text{ кг} = 63,235 \text{ кг}. \end{aligned}$$

*Ответ:* а) 1,968 кг; б) 63,235 кг.

### Стандартный вид числа

Каждое число, большее 10, можно записать в виде  $a \cdot 10^n$ , где  $1 \leq a < 10$  и  $n$  — натуральное число. Такая запись числа называется **стандартным видом числа**.

Аналогично любое положительное число можно представить в виде  $a \cdot 10^m$ ,  $1 \leq a < 10$ ,  $m$  — целое.

33. Запишите в стандартном виде число: а) 358; б) 87 370; в) 5 200 000.

*Решение.*

$$\text{а) } 358 = 3,58 \cdot 10^2.$$

$$\text{б) } 87 \text{ 370} = 8,737 \cdot 10^4.$$

$$в) 5\,200\,000 = 5,2 \cdot 10^6.$$

Ответ: а)  $3,58 \cdot 10^2$ ; б)  $8,737 \cdot 10^4$ ; в)  $5,2 \cdot 10^6$ .

34. Выполните действия: а)  $(2,4 \cdot 10^6) : (1,2 \cdot 10^5)$ ;

б)  $(2,3 \cdot 10^3) \cdot (1,1 \cdot 10^4)$ .

Решение.

$$а) (2,4 \cdot 10^6) : (1,2 \cdot 10^5) = (2,4 : 1,2) \cdot 10^{6-5} = 2 \cdot 10 = 20.$$

$$б) (2,3 \cdot 10^3) \cdot (1,1 \cdot 10^4) = (2,3 \cdot 1,1) \cdot 10^{3+4} = 2,53 \cdot 10^7.$$

Ответ: а) 20; б)  $2,53 \cdot 10^7$ .

## Отношения

### ① Немного полезной информации

**Отношение двух чисел** — это частное от деления одного из них на другое. Отношение показывает, во сколько раз первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго.

Например,  $\frac{15}{5} = 3$  показывает, что число 15 в 3 раза боль-

ше числа 5;  $\frac{7}{63} = \frac{1}{9}$  показывает, что число 7 составляет

$\frac{1}{9}$  часть от числа 63.

Если значения двух величин выражены разными единицами измерения, то для нахождения отношения этих величин надо предварительно перейти к одной единице измерения.

Отношение  $\frac{b}{a}$  называют обратным отношением  $\frac{a}{b}$ .

### Задачи с решениями

35. Найдите отношения:

а) 152 к 8; б)  $\frac{12}{40}$ ; в) 0,25 к 0,55; г) 1,35 к  $5\frac{5}{8}$ .

*Решение.*

а)  $152 : 8 = \frac{152}{8} = 19.$

б)  $12 : 40 = \frac{12}{40} = 0,3.$

в)  $0,25 : 0,55 = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}.$

г)  $1,35 : 5\frac{5}{8} = \frac{135 \cdot 8}{100 \cdot 45} = \frac{3 \cdot 2}{25 \cdot 1} = \frac{6}{25} = 0,24.$

36. Найдите отношения:

а) 30 мин к 10 с; б)  $0,5 \text{ м}^2$  к  $0,1 \text{ дм}^2$ ; в) 0,2 кг к 0,2 г.

*Решение.*

а)  $3 \text{ мин} : 10 \text{ с} = 180 \text{ с} : 10 \text{ с} = 18.$

б)  $0,5 \text{ м}^2 : 0,1 \text{ дм}^2 = 50 \text{ дм}^2 : 0,1 \text{ дм}^2 = 500.$

в)  $0,2 \text{ кг} : 0,2 \text{ г} = 200 \text{ г} : 0,2 \text{ г} = 1000.$

## Пропорции

### ① Немного полезной информации

- Равенство двух отношений называют **пропорцией**.
- В пропорции  $a : b = c : d$ , или  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , числа  $a$  и  $d$  называются **крайними членами**, а числа  $b$  и  $c$  — **средними членами** пропорции.

- В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних членов, т. е.  $a \cdot d = b \cdot c$ .
- Неизвестный крайний член пропорции равен произведению средних членов, делённому на известный крайний член.

Например,  $x : 5 = 8 : 4$ ,  $x = \frac{5 \cdot 8}{4} = 10$ .

- Неизвестный средний член пропорции равен произведению крайних членов, делённому на известный средний.

Например,  $9 : 3 = x : 2$ ,  $x = \frac{9 \cdot 2}{3} = 6$ .

37.  $x : 1,5 = 2,8 : 7$ .

*Решение.*

Используя основное свойство пропорции, получим  $x \cdot 7 = 1,5 \cdot 2,8$ . Отсюда  $x = \frac{1,5 \cdot 2,8}{7} = \frac{1,5 \cdot 0,4}{1} = 0,6$ .

*Ответ:* 0,6.

38.  $37,6 : 8 = x : 6$ .

*Решение.*

Используя основное свойство пропорции, получим  $8 \cdot x = 37,6 \cdot 6$ . Отсюда  $x = \frac{37,6 \cdot 6}{8} = \frac{4,7 \cdot 6}{1} = 28,2$ .

*Ответ:* 28,2.

## Проценты

### ① Немного полезной информации

- 1% — это  $\frac{1}{100}$  часть от целого, 25% — это  $\frac{25}{100} = 0,25$  от целого.
- Процент от числа находится умножением.  
Например, надо найти 20% от числа 250.  
Делаем так:  $250 \cdot \frac{20}{100} = 50$ .
- Число по его проценту находится делением.  
Например, надо найти число, если 25% его составляет 35.  
Делаем так:  $35 : \frac{25}{100} = \frac{35 \cdot 100}{25} = 140$ .
- Чтобы найти, сколько процентов одно число составляет от другого, надо найти отношение этих чисел и результат умножить на 100%.  
Например, надо найти, сколько процентов число 4 составляет от числа 8.  
Делаем так:  $\frac{4}{8} \cdot 100\% = 50\%$ .

Иногда задачи на проценты удобно решать, составив пропорцию.

### ⌘ Задачи с решениями

39. Найдите 10% от числа 125.

*Решение.*

$10\% = 0,10 = 0,1$ . Следовательно,  $10\%$  от числа 125 равны  $125 \cdot 0,1 = 12,5$ .

*Ответ:* 12,5.

## Иррациональные числа

### ① Немного полезной информации

**Арифметическим квадратным корнем** из числа  $a$  называется неотрицательное число, квадрат которого равен  $a$ .

При любом  $a \geq 0$  выражение  $\sqrt{a}$  имеет смысл. Если  $a < 0$ , то выражение  $\sqrt{a}$  не имеет смысла.

Из определения арифметического корня следует, что если выражение  $\sqrt{a}$  имеет смысл, то  $\sqrt{a} \geq 0$  и  $(\sqrt{a})^2 = a$ .

### Свойства арифметического квадратного корня

1) Если  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , то  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

2) Если  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ , то  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

3)  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

### ⚡ Задачи с решениями

40. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt{2500}$ ; б)  $-\sqrt{0,0004}$ ; в)  $2\sqrt{\frac{81}{16}}$ ; г)  $\frac{7}{22} \cdot \sqrt{1,21}$ .

*Решение.*

а)  $\sqrt{2500} = \sqrt{25 \cdot 100} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{100} = 5 \cdot 10 = 50$ .

б)  $-\sqrt{0,0004} = -\sqrt{\frac{4}{10\,000}} = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{10\,000}} = -\frac{2}{100} = -0,02$ .

$$в) 2\sqrt{\frac{81}{16}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

$$г) \frac{7}{22} \cdot \sqrt{1,21} = \frac{7}{22} \cdot \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{7 \cdot 11}{22 \cdot 10} = 0,35.$$

Ответ: а) 50; б)  $-0,02$ ; в)  $4,5$ ; г)  $0,35$ .

41. Внесите множитель под знак корня: а)  $5\sqrt{3}$ ; б)  $-3\sqrt{7}$ .

Решение.

$$а) 5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}.$$

$$б) -3\sqrt{7} = -\sqrt{3^2 \cdot 7} = -\sqrt{9 \cdot 7} = -\sqrt{63}.$$

Ответ: а)  $\sqrt{75}$ ; б)  $-\sqrt{63}$ .

42. Упростите выражение:

$$а) \sqrt{27} - \sqrt{3}; \quad б) \sqrt{125} - 2\sqrt{5};$$

$$в) \frac{\sqrt{216}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3}; \quad г) \frac{1}{2} \cdot \sqrt{28} - \sqrt{7}.$$

Решение.

$$а) \sqrt{27} - \sqrt{3} = \sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$б) \sqrt{125} - 2\sqrt{5} = \sqrt{25 \cdot 5} - 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

$$в) \frac{\sqrt{216}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{36 \cdot 6}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{36} \cdot \sqrt{6}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} =$$

$$= \frac{6\sqrt{6}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}.$$

$$г) \frac{1}{2} \cdot \sqrt{28} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot 7} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7} = \sqrt{7} - \sqrt{7} = 0.$$

Ответ: а)  $2\sqrt{3}$ ; б)  $3\sqrt{5}$ ; в)  $\sqrt{6}$ ; г)  $0$ .

43. Вычислите  $\sqrt{3\frac{1}{16}} - 2\sqrt{0,25}$ .

*Решение.*

$$\sqrt{3\frac{1}{16}} - 2\sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{49}{16}} - 2 \cdot 0,5 = \frac{7}{4} - 1 = 1,75 - 1 = 0,75.$$

*Ответ:* 0,75.

44. Вычислите  $\frac{1}{5}\sqrt{3 \cdot 75} + 4 \cdot \sqrt{5 \cdot \frac{1}{20}}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}\sqrt{3 \cdot 75} + 4 \cdot \sqrt{5 \cdot \frac{1}{20}} &= \frac{1}{5}\sqrt{225} + 4\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5} \cdot 15 + 4 \cdot \frac{1}{2} = \\ &= 3 + 2 = 5. \end{aligned}$$

*Ответ:* 5.

45. Найдите значение выражения  $\sqrt{b^2} - \sqrt{11}$  при  $b = \sqrt{11}$ .

*Решение.*

Подставим  $b = \sqrt{11}$  в выражение  $\sqrt{b^2} - \sqrt{11}$ . Получим

$$\sqrt{(\sqrt{11})^2} - \sqrt{11} = \sqrt{11} - \sqrt{11} = 0.$$

*Ответ:* 0.

46. Упростите выражение  $(7\sqrt{3} + 17\sqrt{48} - \sqrt{147}) : (2\sqrt{3})$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} (7\sqrt{3} + 17\sqrt{48} - \sqrt{147}) : (2\sqrt{3}) &= \\ &= (\sqrt{147} + 17\sqrt{48} - \sqrt{147}) : (2\sqrt{3}) = \\ &= \frac{17\sqrt{48}}{2\sqrt{3}} = \frac{17}{2}\sqrt{\frac{48}{3}} = \frac{17}{2}\sqrt{16} = \frac{17 \cdot 4}{2} = 34. \end{aligned}$$

*Ответ:* 34.

47. Сократите дробь  $\frac{25 - y}{5 - \sqrt{y}}$ , если  $\sqrt{y} \neq 5$ .

*Решение.*

$$\frac{25 - y}{5 - \sqrt{y}} = \frac{(5 - \sqrt{y})(5 + \sqrt{y})}{5 - \sqrt{y}} = 5 + \sqrt{y}.$$

*Ответ:*  $5 + \sqrt{y}$ .



48. Исключите иррациональность из знаменателя:

а)  $\frac{3}{\sqrt{7}}$ ;

б)  $\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ .

*Решение.*

а)  $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ .

б)  $\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} =$   
 $= \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ .

*Ответ:* а)  $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ ; б)  $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ .

49. Найдите значение выражения  $2x^2 - 4\sqrt{3}x - 1$ , если  $x = \sqrt{3} - 1$ .

*Решение.*

Подставляя в заданное выражение значение  $x$ , получим  
 $2(\sqrt{3} - 1)^2 - 4\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) - 1 = 2(3 - 2\sqrt{3} + 1) - 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} +$   
 $+ 4\sqrt{3} - 1 = 6 - 4\sqrt{3} + 2 - 12 + 4\sqrt{3} - 1 = -5$ .

*Ответ:*  $-5$ .

50. При каких значениях  $a$  имеет смысл выражение  $\frac{1}{\sqrt{4a-1}}$ ?

*Решение.*

Учитывая, что квадратный корень определён на множестве неотрицательных чисел, а знаменатель дроби отличен от

нуля, выражение  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  имеет смысл при  $t > 0$ . Значит, выраже-

ние  $\frac{1}{\sqrt{4a-1}}$  имеет смысл, если  $4a - 1 > 0$ . Отсюда  $a > 0,25$ .

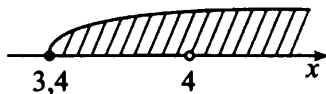
*Ответ:*  $(0,25; +\infty)$ .

**51.** Найдите наименьшее целое число, входящее в область допустимых значений выражения  $\frac{\sqrt{5x-17}}{x-4}$ .

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 5x - 17 \geq 0, \\ x - 4 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3,4, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Следовательно, наименьшим целым числом, входящим в область допустимых значений исходного выражения, является 5.



**Рис. 4**

*Ответ:* 5.

### ① Немного полезной информации

**Рациональным** называется число, которое можно представить в виде  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  — целое,  $n$  — натуральное. Напри-

мер,  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{4}{9}$ , 7. Остальные числа называют **иррациональными**.

Если  $\frac{m}{n} > 0$  — несократимая дробь (и числитель, и знаменатель нельзя сократить на одно и то же число), то  $\sqrt{\frac{m}{n}}$  иррационально.

Сумма рациональных чисел рациональна.

Целое число называется **чётным**, если оно делится на 2, и **нечётным** в противном случае.

### 8 — Задачи с решениями

52. Какое из указанных чисел является рациональным?

1)  $\frac{(\sqrt{24} - \sqrt{5})(\sqrt{24} + \sqrt{5})}{\sqrt{19}}$ ,

2)  $(\sqrt{17} + \sqrt{3})(\sqrt{17} - \sqrt{3}) + \sqrt{5}$ ,

3)  $(2 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}$ ;

4)  $\sqrt{7} + 2$ .

*Решение.*

Преобразуем каждое выражение:

1)  $\frac{(\sqrt{24} - \sqrt{5})(\sqrt{24} + \sqrt{5})}{\sqrt{19}} = \frac{24 - 5}{\sqrt{19}} = \sqrt{19}$  — иррациональное число;

2)  $(\sqrt{17} + \sqrt{3})(\sqrt{17} - \sqrt{3}) + \sqrt{5} = 17 - 3 + \sqrt{5} = 14 + \sqrt{5}$  — иррациональное число;

3)  $(2 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = 6 + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 6$  — рациональное число;

4)  $\sqrt{7} + 2$  — иррациональное число.

*Ответ:* 3.

### ❓ Варианты для самостоятельного решения

#### Вариант 1

1. Выполните действия  $3,5 - (-13,12) + (-5,173)$ .

2. Найдите значение выражения  $|-3 : 2,5| - 1\frac{2}{3}$ .



**Вариант 3**

1. Выполните действия  $3,75 + (-10,5) - (-17,003)$ .
2. Найдите значение выражения  $-3,27 : |-0,3| + 1\frac{5}{7}$ .
3. Вычислите  $\sqrt{4\frac{1}{18}} : \sqrt{1\frac{1}{72}}$ .
4. Выполните деление  $54\,000 : 1,8$ . В ответе запишите число в стандартном виде.
5. Выполните действие  $32\text{ м } 13\text{ см} - 12\text{ дм } 5\text{ см}$ . Ответ запишите в метрах.
6. Найдите значение выражения  $5\frac{1}{2} + (12,17 - 25,82) : 3$ .
7. Какое из указанных чисел является иррациональным?

1)  $\sqrt{25}$     2)  $\frac{17}{3} - 1$     3)  $\frac{\sqrt{810}}{\sqrt{10}}$     4)  $(\sqrt{3} - 1)^2$

**Вариант 4**

1. Выполните действия  $(-2,81) + 12,009 - (-5,4)$ .
2. Найдите значение выражения  $|-8,72| : 0,08 + 1\frac{2}{25}$ .
3. Вычислите  $\frac{\sqrt{72} + \sqrt{18}}{\sqrt{72}}$ .
4. Выполните деление  $108,8 : 0,00064$ . В ответе запишите число в стандартном виде.
5. Выполните действие  $5\text{ кг } 200\text{ г} - 3\text{ кг } 15\text{ г}$ . Ответ запишите в килограммах.
6. Найдите значение выражения  $3\frac{4}{5} + (8,52 - 13,2) : 0,2$ .

7. Какое из указанных чисел является иррациональным?

1)  $(\sqrt{148} - \sqrt{64})(\sqrt{148} + 8)$

2)  $(\sqrt{7} + 1)^2 - 2\sqrt{7}$

3)  $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

4)  $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{14}}{5}$

### Вариант 5

1. Выполните действия  $-2,86 - (-7,004) + (-4,144)$ .

2. Найдите значение выражения  $-6,036 : |-0,503| + 12\frac{2}{3}$ .

3. Сколько целых чисел принадлежит промежутку  $[\sqrt{15}; \sqrt{150}]$ ?

4. Выполните умножение  $2300 \cdot 1,1$  и в ответе запишите число в стандартном виде.

5. Выполните действие  $75 \text{ кг } 300 \text{ г} - 5 \text{ кг } 15 \text{ г}$ . Ответ запишите в килограммах.

6. Найдите значение выражения  $3\frac{1}{2} + (15,16 - 10,3) : 0,3$ .

7. Какое из указанных чисел является чётным целым?

1)  $\sqrt{25}$

2)  $\sqrt{\frac{2}{8}}$

3)  $\sqrt{\frac{16}{4}}$

4)  $\sqrt{7} + 2$

### Вариант 6

1. Выполните действия  $-5,64 - (-10,006) + 15,634$ .

2. Найдите значение выражения  $|-12,004| : 30,01 + \left| -5\frac{2}{5} \right|$ .

3. Вычислите  $\sqrt{1\frac{3}{65}} \cdot \sqrt{3\frac{28}{34}}$ .

4. Выполните деление  $24 : 0,00012$  и в ответе запишите число в стандартном виде.

5. Выполните действие  $15 \text{ мин } 30 \text{ с} + 2 \text{ мин } 45 \text{ с}$ . Ответ запишите в минутах.

6. Найдите значение выражения  $2\frac{3}{5} + (10,31 - 5,21) : 0,3$ .

7. Какое из указанных чисел является целым?

1)  $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$     2)  $\sqrt{\frac{25}{4}}$     3)  $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$     4)  $\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{20}}$

## Глава 2. Алгебраические выражения

### ① Немного полезной информации

**Алгебраическое выражение** — это запись из чисел и букв, соединённых знаками действий и скобками.

Приведём примеры алгебраических выражений:

$$3(a + b); \quad 7x + 1; \quad y; \quad 2yz; \quad \frac{2a + c}{x}.$$

**Значение выражения** мы получаем при замене каждой буквы некоторым числом и выполнении алгебраических действий.

Например, найдём значение выражения  $7a - 3ab + 1$  при  $a = 4$ ,  $b = 2$ . Подставив вместо букв указанные числа, получим  $7 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 2 + 1 = 28 - 24 + 1 = 5$ .

Слагаемые, имеющие одинаковые буквенные множители, называют **подобными**.

Например, слагаемые  $3ab$  и  $-5ab$  являются подобными. Также являются подобными слагаемые  $4x$  и  $10x$ . А слагаемые  $3x$  и  $3y$  подобными не являются.

При упрощении выражения следует находить суммы подобных слагаемых, то есть выполнять **приведение подобных слагаемых**.

### ☞ Задачи с решениями

1. Упростите выражение  $5xy + x + y - 2xy - 3xy$  и найдите его значение при  $x = 2 + \sqrt{2}$ ,  $y = 3 - \sqrt{2}$ .

*Решение.*

В исходном выражении найдём и подчеркнём все подобные слагаемые:  $5xy$  +  $x$  +  $y$  -  $2xy$  -  $3xy$ . Найдём сумму подчёрк-



нутых слагаемых:  $5xy - 2xy - 3xy = (5 - 2 - 3)xy = 0xy = 0$ . Таким образом,  $5xy + x + y - 2xy - 3xy = x + y$ . Подставляя вместо  $x$  и  $y$  указанные в условии числа, получаем  $x + y = 2 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 5$ .

*Ответ:* 5.

2. Упростите выражение  $5a + 3\sqrt{7} - 4a - 4\sqrt{7}$  и найдите его значение при  $a = 2 + \sqrt{7}$ .

*Решение.*

В исходном выражении найдём и подчеркнём все подобные слагаемые:  $\underline{5a} + \underline{3\sqrt{7}} - \underline{4a} - \underline{4\sqrt{7}}$ . Найдём сумму слагаемых, подчёркнутых одной чертой:  $5a - 4a = a$ . Теперь найдём сумму слагаемых, подчёркнутых двумя чертами:  $3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} = -\sqrt{7}$ . Таким образом,  $5a + 3\sqrt{7} - 4a - 4\sqrt{7} = a - \sqrt{7}$ . Подставляя вместо  $a$  указанное в условии число, получаем  $a - \sqrt{7} = 2 + \sqrt{7} - \sqrt{7} = 2$ .

*Ответ:* 2.

## Правила раскрытия скобок

### ① Немного полезной информации

- Если перед скобками стоит знак «+», то при раскрытии скобок все слагаемые остаются без изменений.

Например,  $2a + (3b - c + 4) = 2a + 3b - c + 4$ .

- Если перед скобками стоит знак «-», то при раскрытии скобок каждое слагаемое меняет знак на противоположный. Например,  $4x - (y - 6z - 5) = 4x - y + 6z + 5$ .

- Если перед скобками (или после скобок) стоит множитель, то при раскрытии скобок каждое слагаемое умножается на

этот множитель. При подсчёте этих произведений следует учитывать как знак множителя за скобками, так и знаки слагаемых внутри скобок.

Рассмотрим два примера:

$$(5a - b - 8) \cdot 4c = 5a \cdot 4c + (-b) \cdot 4c + (-8) \cdot 4c = \\ = 20ac - 4bc - 32c;$$

$$-2x(3y - z + 4) = (-2x) \cdot 3y + (-2x) \cdot (-z) + (-2x) \cdot 4 = \\ = -6xy + 2xz - 8x.$$

### 🔗 Задачи с решениями

3. Упростите выражение  $(b - c) \cdot 4a + 4ac$  и найдите его значение при  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 2\sqrt{2}$ ,  $c = 3\sqrt{2}$ .

*Решение.*

$(b - c) \cdot 4a + 4ac = 4ba - 4ca + 4ac = 4ba$ . Подставляя вместо  $a$  и  $b$  указанные в условии числа, получаем  $4ba = 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ .

*Ответ:* 16.

4. Упростите выражение  $3ac - a(c - 3b) - 3ab$  и найдите его значение при  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = 5\sqrt{3}$ ,  $c = 3\sqrt{3}$ .

*Решение.*

$3ac - a(c - 3b) - 3ab = 3ac - a \cdot c - a \cdot (-3b) - 3ab = \\ = 3ac - ac + 3ab - 3ab = 2ac$ . Подставляя вместо  $a$  и  $c$  указанные в условии числа, получаем  $2ac = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ .

*Ответ:* 18.

### ① Немного полезной информации

Если требуется раскрыть произведение, состоящее из нескольких скобок, то скобки следует раскрывать поочередно. Например:

$$\begin{aligned}
 (3a - 2b)(4x - 5y) &= 3a(4x - 5y) - 2b(4x - 5y) = \\
 &= 3a \cdot 4x + 3a \cdot (-5y) + (-2b) \cdot 4x + (-2b) \cdot (-5y) = \\
 &= 12ax - 15ay - 8bx + 10by.
 \end{aligned}$$

В этом примере мы сначала раскрыли первые скобки  $(3a - 2b)$ , а затем вторые скобки  $(4x - 5y)$ . Но можно было сделать и по-другому, начав с раскрытия вторых скобок:

$$\begin{aligned}
 (3a - 2b)(4x - 5y) &= (3a - 2b) \cdot 4x + (3a - 2b) \cdot (-5y) = \\
 &= 3a \cdot 4x + (-2b) \cdot 4x + 3a \cdot (-5y) + (-2b) \cdot (-5y) = \\
 &= 12ax - 8bx - 15ay + 10by.
 \end{aligned}$$

### 8 — Задачи с решениями

5. Упростите выражение  $(a - 6)(b + 5) - ab + 6b$  и найдите его значение при  $a = 7$ ,  $b = 3 + 4\sqrt{7}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 (a - 6)(b + 5) - ab + 6b &= a(b + 5) - 6(b + 5) - ab + 6b = \\
 &= ab + 5a - 6b - 30 - ab + 6b = 5a - 30.
 \end{aligned}$$

Подставляя  $a = 7$ , получаем  $5a - 30 = 5 \cdot 7 - 30 = 35 - 30 = 5$ .

*Ответ:* 5.

### Формулы сокращённого умножения

#### ① Немного полезной информации

Следует запомнить три формулы сокращённого умножения.

- Квадрат суммы:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .
- Квадрат разности:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .
- Разность квадратов:  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .

Например:

$$(2c + 3)^2 = (2c)^2 + 2 \cdot 2c \cdot 3 + 3^2 = 4c^2 + 12c + 9;$$

$$(3k - 1)^2 = (3k)^2 - 2 \cdot 3k + 1 = 9k^2 - 6k + 1;$$

$$t^2 - 25 = t^2 - 5^2 = (t - 5)(t + 5).$$

**8** **Задачи с решениями**

6. Сократите дробь  $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ ,  $x \neq -1$ .

*Решение.*

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2}{x + 1} = x + 1.$$

*Ответ:*  $x + 1$ .

7. Сократите дробь  $\frac{a^2 - 9}{a + 3}$ ,  $a \neq -3$ .

*Решение.*

$$\frac{a^2 - 9}{a + 3} = \frac{a^2 - 3^2}{a + 3} = \frac{(a - 3)(a + 3)}{a + 3} = a - 3.$$

*Ответ:*  $a - 3$ .

**Допустимые значения переменных****① Немного полезной информации**

- **Допустимые значения переменных** — это значения, при которых алгебраическое выражение имеет смысл.
- Если в выражении есть дробь, то **знаменатель дроби** должен быть **отличен от нуля**.

Например, для выражения  $\frac{b}{a - 2}$  допустимыми являются значения переменных, удовлетворяющие условию  $a - 2 \neq 0$ , то есть  $a \neq 2$ .

- Если в алгебраическом выражении есть квадратный корень, то **подкоренное выражение** должно быть **неотрицательно**.

Например, для выражения  $\sqrt{y+3}$  допустимыми являются значения переменных, удовлетворяющие условию  $y+3 \geq 0$ , то есть  $y \geq -3$ .

### 8. Задачи с решениями

8. Найдите допустимые значения переменной  $b$  в выражении

$$\frac{b}{\sqrt{b-5}}.$$

*Решение.*

Выражение под корнем должно быть неотрицательным, поэтому  $b-5 \geq 0$ ,  $b \geq 5$ . Кроме того, знаменатель должен быть отличен от нуля, поэтому  $\sqrt{b-5} \neq 0$ ,  $b-5 \neq 0$ ,  $b \neq 5$ . Таким образом, одновременно должно выполняться  $b \geq 5$  и  $b \neq 5$ , следовательно,  $b > 5$ .

*Ответ:*  $b > 5$ .

9. Найдите количество целых чисел, входящих в область допустимых значений переменной  $x$  в выражении  $\frac{3 - \sqrt{10 - x}}{\sqrt{x - 3}}$ .

*Решение.*

*1-й способ.*

В числителе под корнем стоит выражение  $10 - x$ , поэтому  $10 - x \geq 0$ ,  $x \leq 10$ . В знаменателе под корнем стоит выражение  $x - 3$ , поэтому  $x - 3 \geq 0$ . Кроме того, знаменатель должен быть отличен от нуля, поэтому последнее неравенство должно быть строгим:  $x - 3 > 0$ ,  $x > 3$ . Мы нашли область допустимых значений:  $3 < x \leq 10$ . В неё входят целые числа 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 — всего 7 чисел.

2-й способ.

Покажем запись решения, если рассуждения выполнять устно.

$$\begin{cases} 10 - x \geq 0, \\ x - 3 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 10, \\ x > 3. \end{cases} \quad \text{Неравенство } 3 < x \leq 10$$

имеет 7 целых решений: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Ответ: 7.

## Алгебраические дроби

### ① Немного полезной информации

**Алгебраическая дробь** — это дробь, в числителе и знаменателе которой стоят алгебраические выражения. Все действия с алгебраическими дробями производятся по тем же правилам, что и с числовыми дробями.

### ☞ Задачи с решениями

10. Упростите выражение  $\left(\frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n}\right) : \frac{m}{m^2-n^2}$ .

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n}\right) : \frac{m}{m^2-n^2} &= \frac{m+n+m-n}{(m-n)(m+n)} \cdot \frac{m^2-n^2}{m} = \\ &= \frac{2m}{m^2-n^2} \cdot \frac{m^2-n^2}{m} = \frac{2m \cdot (m^2-n^2)}{(m^2-n^2) \cdot m} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

## Степень с целым показателем

### ① Немного полезной информации

Пусть  $n$  — натуральное число. Тогда по определению

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n .$$

*n множителей*

Например,  $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ ;  $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ ;  
 $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ ;  $7^1 = 7$ ;  $0^8 = 0 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0 = 0$ .

Пусть  $n = 0$ ,  $a \neq 0$ , тогда  $a^0 = 1$ .

Например,  $5^0 = 1$ ,  $(-45)^0 = 1$ ,  $(0,7)^0 = 1$ .

Запись  $0^0$  считается не имеющей смысла.

Пусть  $n$  — натуральное число,  $a \neq 0$ , тогда  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

Например,  $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{64}$ ;

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}.$$

Запись  $0^{-n}$  считается не имеющей смысла.

**Свойства степени с целым показателем:**

$$a^m a^n = a^{m+n};$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

если  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ .

### ☞ Задачи с решениями

11. Упростите выражение  $(2a)^{-5} \cdot (4a)^5$ .

*Решение.*

$$(2a)^{-5} \cdot (4a)^5 = 2^{-5} \cdot a^{-5} \cdot 4^5 \cdot a^5 = \frac{1}{2^5} \cdot 4^5 \cdot a^{-5+5} =$$

$$= \left(\frac{4}{2}\right)^5 \cdot a^0 = 2^5 \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$$

*Ответ:* 32.

12. Упростите выражение  $\frac{60a^{-6} \cdot a^3}{a^{-2}}$  и найдите его значение при  $a = 15$ .

*Решение.*

$$\frac{60a^{-6} \cdot a^3}{a^{-2}} = 60a^{-6+3-(-2)} = 60a^{-1} = \frac{60}{a}. \text{ При } a = 15 \text{ по-}$$

лучаем  $\frac{60}{a} = \frac{60}{15} = 4$ .

*Ответ:* 4.

13. Упростите выражение  $\left(\frac{x}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{x^2}{9}\right)^{-4}$  и найдите его значение при  $x = 21$ .

*Решение.*

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{x^2}{9}\right)^{-4} = \left(\frac{x}{3}\right)^{10} \cdot \left(\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)^{-4} = \left(\frac{x}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{-8} = \left(\frac{x}{3}\right)^2.$$

При  $x = 21$  получаем  $\left(\frac{21}{3}\right)^2 = 7^2 = 49$ .

*Ответ:* 49.

## Тождества

### ① Немного полезной информации

**Тождество** — равенство, справедливое при любых допустимых значениях входящих в него переменных.



Например, тождествами являются равенства

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2); \quad \frac{a + b}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{1}{a + b}.$$

С тождеством можно выполнять равносильные преобразования: прибавлять одно и то же число (или выражение) к обеим частям, вычитать из обеих частей одно и то же число (или выражение), умножать или делить обе части на одно и то же ненулевое число (или выражение).

Например, из формулы площади параллелограмма  $S = ah$  (где  $a$  — основание,  $h$  — высота) можно выразить высоту  $h$ , разделив обе части равенства на длину основания  $a$ :  $h = \frac{S}{a}$ .

Пусть величины в обеих частях равенства неотрицательны. Тогда равносильными будут ещё два преобразования: возведение в квадрат обеих частей равенства и извлечение квадратного корня из обеих частей равенства.

Например, из формулы площади квадрата  $S = a^2$  можно выразить длину  $a$  его стороны:  $\sqrt{S} = \sqrt{a^2}$ , откуда  $a = \sqrt{S}$ .

При применении равносильных преобразований к тождественному равенству мы снова получаем тождественное равенство.

14. Определите, какое из приведённых ниже выражений тождественно равно выражению  $(a - b)(2 - c)$ .

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1) $-(b - a)(c - 2)$ | 2) $(2 - c)(b - a)$  |
| 3) $(c - 2)(b - a)$  | 4) $-(a + b)(2 + c)$ |

*Решение.*

Определим, какие из указанных выражений можно преобразовать к виду  $(a - b)(2 - c)$ .

- 1)  $-(b-a)(c-2) = (a-b)(c-2) \neq (a-b)(2-c)$ ;
- 2)  $(2-c)(b-a) = (b-a)(2-c) \neq (a-b)(2-c)$ ;
- 3)  $(c-2)(b-a) = (2-c)(a-b) = (a-b)(2-c)$ ;
- 4)  $-(a+b)(2+c) = (-a-b)(2+c) \neq (a-b)(2-c)$ .

Таким образом, только выражение №3 тождественно равно выражению  $(a-b)(2-c)$ .

Ответ: 3.

### ⊗ Варианты для самостоятельного решения

#### Вариант 1

1. Упростите выражение  $1 + (a+3)(b-2) + 2a - 3b$  и найдите его значение при  $a = \sqrt{32}$ ,  $b = \sqrt{2}$ .
2. Сократите дробь  $\frac{4a^2c^3}{8ac^2}$ .
3. Найдите допустимые значения переменной  $x$  в выражении  $\sqrt{x-2}$ .
4. Упростите выражение  $\frac{1}{x} + \frac{x-2y}{2xy}$  и найдите его значение при  $x = \sqrt{2} + 1$ ,  $y = \frac{1}{4}$ .
5. Укажите выражение, тождественно равное выражению  $(x-3y)(2a+b)$ .

1)  $(3y-x)(2a+b)$

2)  $(3y-x)(-2a+b)$

3)  $(x-3y)(b+2a)$

4)  $(x-3y)(2a-b)$

### Вариант 2

1. Упростите выражение  $b^2 - 4b + 4 - (4 - b^2)$  и найдите его значение при  $b = \sqrt{3} + 1$ .

2. Сократите дробь  $\frac{5n^3m^2}{25n^2m^3}$ .

3. При каких значениях  $m$  выражение  $\frac{m^2 - 4}{m - 2}$  имеет смысл?

4. Упростите выражение  $\left(1 - \frac{2ab}{a^2 + b^2}\right) \cdot (a^2 + b^2)$ .

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению  $\frac{a - 2}{a^2 - 4}$  при  $a \neq \pm 2$ .

1)  $\frac{1}{2 - a}$

2)  $\frac{a - 2}{2}$

3)  $\frac{1}{a + 2}$

4)  $\frac{1}{a - 2}$

### Вариант 3

1. Упростите выражение  $b^2 - b\sqrt{5} + 9 - (9 + b^2)$  и найдите его значение при  $b = \sqrt{20}$ .

2. Сократите дробь  $\frac{27a^3b^2}{3ab^2}$ .

3. Найдите допустимые значения переменной  $x$  в выражении  $\sqrt{x - 4}$ .

4. Упростите выражение  $\frac{9x^2 + y^2}{3} + 2xy$ .

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению  $(x - 2y)(5a - 7b)$ .

1)  $(x - 2y)(5a + 7b)$

2)  $(2y - x)(7b - 5a)$

3)  $(x - 2y)(7b - 5a)$

4)  $(x - 2y)(5b - 7a)$

**Вариант 4**

1. Упростите выражение  $(a - b)(b + a) - a^2$  и найдите его значение при  $a = 1 + \sqrt{7}$ ,  $b = \sqrt{11}$ .

2. Сократите дробь  $\frac{12y^7b^5}{4(yb^2)^7}$ .

3. Найдите допустимые значения переменной  $x$  в выражении

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3-x}.$$

4. Упростите выражение  $\left(\frac{a^2 + b^2}{a} + 2b\right) : \frac{a+b}{b}$  и найдите его

значение при  $b = \frac{5}{2}$ ,  $a = \frac{1}{4}$ .

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению  $64 - a^2$ .

1)  $(8 - a)(8 + a)$

2)  $(a + 8)(a - 8)$

3)  $(a + 32)(a - 32)$

4)  $(32 - a)(32 + a)$

**Вариант 5**

1. Упростите выражение  $(x + y)x - x^2 - 2xy$  и найдите его значение при  $x = \sqrt{12}$ ,  $y = \sqrt{3}$ .

2. Сократите дробь  $\frac{8a^3ab^5}{12a^2b^3}$ .

3. Найдите допустимые значения переменной  $a$  в выражении  $\sqrt{3 - a}$ .

4. Упростите выражение  $\left(1 - \frac{4a}{a^2 + 4}\right) \cdot (a^2 + 4)$  и найдите его значение при  $a = 2 - \sqrt{11}$ .

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению

$$\frac{2x - 7}{5 - 3x}.$$

1)  $\frac{2x - 7}{5 + 3x}$

2)  $\frac{7 - 2x}{5 + 3x}$

3)  $\frac{7 - 2x}{3x - 5}$

4)  $\frac{2x - 7}{3x - 5}$

### Вариант 6

1. Упростите выражение  $x^2 + x\sqrt{10} - 25 - (x^2 - 25)$  и найдите его значение при  $x = \sqrt{40}$ .

2. Сократите дробь  $\frac{12x^3y^2}{(2xy)^3}$ .

3. Найдите допустимые значения переменной  $x$  в выражении

$$\frac{1}{\sqrt{x + 5}}.$$

4. Упростите выражение  $\frac{(a^2 + 8ab + 16b^2)}{a + 4b} \cdot (a - 4b)$  и найдите

его значение при  $a = \sqrt{37}$ ,  $b = \sqrt{2}$ .

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению

$$\frac{9 - 5x}{2x - 3}.$$

1)  $\frac{5x - 9}{3 - 2x}$

2)  $\frac{9 + 5x}{2x + 3}$

3)  $-\frac{9 + 5x}{2x + 3}$

4)  $-\frac{5x - 9}{3 - 2x}$

## Глава 3. Уравнения и неравенства

### ① Немного полезной информации

**Уравнение** — это равенство, содержащее неизвестную, значение которой надо найти.

**Корень уравнения** — это значение неизвестной, при котором данное уравнение обращается в верное равенство.

**Решить уравнение** — это значит найти все его корни или доказать, что данное уравнение корней не имеет.

Так, уравнение  $3 \cdot x = 6$  имеет корень  $x = 2$ , поскольку  $3 \cdot 2 = 6$  — верное равенство. При этом других корней нет.

**Основные правила**, с помощью которых можно решить уравнение:

- к обеим частям уравнения можно прибавлять одно и то же число или выражение;
- из обеих частей уравнения можно вычитать одно и то же число или выражение;
- можно переносить слагаемое из одной части уравнения в другую, при этом данное слагаемое меняет свой знак на противоположный;
- обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

### ☞ Задачи с решениями

1. Решите уравнение  $4 \cdot (x + 5) = -16$ .

*Решение.*

Разделим обе части уравнения на 4.

$$x + 5 = -16 : 4,$$

$$x + 5 = -4,$$

$$x = -4 - 5,$$

$$x = -9.$$

*Ответ:*  $-9$ .

2. Решите уравнение  $6x - 12 = 5x + 4$ .

*Решение.*

Перенесём  $5x$  из правой части в левую, изменив знак на противоположный:

$$6x - 5x - 12 = 4,$$

$$x - 12 = 4.$$

Перенесём  $(-12)$  из левой части уравнения в правую, изменив знак на противоположный:

$$x = 4 + 12,$$

$$x = 16.$$

*Ответ:*  $16$ .

3. Решите уравнение  $\frac{x + 7}{3} = \frac{2x - 3}{5}$ .

*Решение.*

В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних, поэтому

$$5(x + 7) = 3(2x - 3),$$

$$5x + 35 = 6x - 9,$$

$$5x - 6x = -35 - 9,$$

$$-x = -44,$$

$$x = 44.$$

*Ответ:*  $44$ .

**① Немного полезной информации**

**Равенство произведения нулю.** Произведение равно нулю, если

- хотя бы один из сомножителей равен нулю;
- все другие множители при этом имеют смысл.

Например, произведение  $(x-3)^2 \cdot \frac{x}{x-3}$  равно нулю только

при  $x = 0$ , т. к. при  $x = 3$  множитель  $\frac{x}{x-3}$  не имеет смысла.

**☞ Задачи с решениями**

4. Найдите корни уравнения  $(x - 7)(x + 8) = 0$ .

*Решение.*

$$(x - 7)(x + 8) = 0,$$

$$x - 7 = 0 \quad \text{или} \quad x + 8 = 0,$$

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -8.$$

*Ответ:*  $-8; 7$ .

5. Найдите корни уравнения  $\sqrt{x-8}(x+11) = 0$ .

*Решение.*

$$\sqrt{x-8}(x+11) = 0.$$

$$\sqrt{x-8} = 0 \quad \text{или} \quad x+11 = 0,$$

$$x - 8 = 0,$$

$$x_1 = 8, \quad x_2 = -11.$$

При  $x_2 = -11$  множитель  $\sqrt{x-8}$  не имеет смысла, так как подкоренное выражение  $-11 - 8 = -19 < 0$ . Поэтому заданное уравнение имеет один корень  $x = 8$ .

*Ответ:*  $8$ .



**Уравнения линейные и сводящиеся к линейным**

**Линейные уравнения** — это уравнения вида  $ax = b$ , где  $x$  — неизвестное,  $a$  и  $b$  — заданные числа.

- Если  $a = 0$  и  $b \neq 0$ , то уравнение имеет вид  $0 \cdot x = b$ , решений нет.
- Если  $a = 0$  и  $b = 0$ , то уравнение имеет вид  $0 \cdot x = 0$ ,  $x$  — любое число.
- Если  $a \neq 0$  и  $b$  — любое число, то делим обе части уравнения на  $a$ , находя неизвестное:  $x = \frac{b}{a}$ .

**Задачи с решениями**

6. Найдите корень уравнения  $-7x = 35$ .

*Решение.*

Разделим обе части уравнения на коэффициент при неизвестном ( $-7$ ).

$$x = 35 : (-7),$$

$$x = -5.$$

*Ответ:*  $-5$ .

7. Решите уравнение  $7x = 28 + 3x$ .

*Решение.*

Перенесём  $3x$  в левую часть и приведём подобные:

$$7x - 3x = 28,$$

$$4x = 28,$$

$$x = 28 : 4,$$

$$x = 7.$$

*Ответ:*  $7$ .

8. Решите уравнение  $-27x + 36 = 3 \cdot (56 - 9x)$ .

*Решение.*

$$-27x + 36 = 3 \cdot (56 - 9x),$$

$$-27x + 36 = 168 - 27x,$$

$$-27x + 27x = 168 - 36,$$

$$0x = 132, \text{ корней нет.}$$

*Ответ:* корней нет.

9. Решите уравнение  $(6 - x) + (12 - x) - (3 - 2x) = 15$ .

*Решение.*

Раскроем скобки:

$$6 - x + 12 - x - 3 + 2x = 15.$$

Приведём подобные слагаемые:

$$(-1 - 1 + 2)x + (6 + 12 - 3) = 15,$$

$$0x + 15 = 15,$$

$$0x = 15 - 15,$$

$$0x = 0, x \text{ — любое число.}$$

*Ответ:*  $x$  — любое число.

10. Решите уравнение

$$\frac{x + 3}{4} - \frac{2x + 1}{3} = -5.$$

*Решение.*

Умножим обе части уравнения на наименьший общий знаменатель дробей  $\frac{x + 3}{4}$  и  $\frac{2x + 1}{3}$ , то есть на 12.

$$12 \cdot \left( \frac{x + 3}{4} - \frac{2x + 1}{3} \right) = 12 \cdot (-5),$$

$$12 \cdot \frac{x + 3}{4} - 12 \cdot \frac{2x + 1}{3} = -60,$$

$$3 \cdot (x + 3) - 4 \cdot (2x + 1) = -60,$$

$$3x + 9 - 8x - 4 = -60,$$

$$3x - 8x = -60 - 9 + 4,$$

$$-5x = -65,$$

$$x = 13.$$

Ответ: 13.

## Квадратные уравнения

### ① Немного полезной информации

**Квадратные уравнения** — это уравнения вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $x$  — переменная,  $a$ ,  $b$  и  $c$  — некоторые числа, причём  $a \neq 0$ .

**Неполные квадратные уравнения** — квадратные уравнения, в которых  $b = 0$  и/или  $c = 0$ . Решение неполных квадратных уравнений рассмотрим на примерах.

### ☞ Задачи с решениями

11. Решите уравнение  $4x^2 + x = 0$ .

*Решение.*

В левой части вынесем общий множитель  $x$  за скобки:

$$x(4x + 1) = 0,$$

$$x = 0, \quad \text{или} \quad 4x + 1 = 0,$$

$$4x = -1,$$

$$x = -0,25.$$

$x_1 = 0$ ;  $x_2 = -0,25$  — корни исходного уравнения.

Ответ: 0; -0,25.

12. Решите уравнение  $3x^2 = 81$ .

*Решение.*

$$x^2 = 27,$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{27},$$

$$x_1 = -3\sqrt{3}, \quad x_2 = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Ответ: } -3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}.$$

13. Решите уравнение  $5x^2 - 20 = 0$ .

*Решение.*

*1-й способ.*

Разделим обе части уравнения на 5, получим  $x^2 - 4 = 0$ .

Замечаем, что в левой части уравнения стоит разность квадратов, поэтому уравнение можно переписать в виде

$$x^2 - 2^2 = 0,$$

$$(x + 2)(x - 2) = 0,$$

$$x + 2 = 0 \quad \text{или} \quad x - 2 = 0,$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$$

*2-й способ.*

$$5x^2 = 20,$$

$$x^2 = 20 : 5,$$

$$x^2 = 4,$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{4},$$

$$x_{1,2} = \pm 2.$$

$$\text{Ответ: } -2; 2.$$

14. Решите уравнение  $3x^2 + 8 = 0$ .

*Решение.*

$$3x^2 + 8 = 0,$$

$$3x^2 = -8,$$

$$x^2 = -\frac{8}{3}.$$

Квадрат числа не может быть отрицательным, поэтому данное уравнение корней не имеет.

*Ответ:* корней нет.

15. Решите уравнение  $-1,7x^2 = 0$ .

*Решение.*

Разделим обе части уравнения на  $-1,7$ , получим уравнение  $x^2 = 0$ . Его корнем является только число 0.

*Ответ:* 0.

## Решение квадратных уравнений общего вида

### ① Немного полезной информации

Рассмотрим квадратное уравнение общего вида, то есть  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a \neq 0$ . Такие уравнения решаем по алгоритму:

- найти дискриминант  $D$ , вычисляемый по формуле  $D = b^2 - 4ac$ ;
- по знаку дискриминанта определить число корней уравнения:
  - если  $D < 0$ , то уравнение корней не имеет (что уже можно писать в ответ, дальнейшие вычисления не требуются);
  - если  $D = 0$ , то уравнение имеет один корень  $x = -\frac{b}{2a}$ ;

— если  $D > 0$ , то уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ то есть}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

- найти корни;
- записать ответ.

### ☞ Задачи с решениями

16. Решите уравнение  $6x^2 - 13x + 2 = 0$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{l|l} a = 6 & \text{Вычислим дискриминант } D = b^2 - 4ac. \\ b = -13 & D = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 169 - 48 = 121, D > 0, \\ c = 2 & \text{поэтому исходное уравнение имеет два корня:} \end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 6} = \frac{13 \pm 11}{12}, \text{ откуда}$$

$$x_1 = \frac{13 - 11}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{13 + 11}{12} = 2.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{6}; 2$ .

17. Решите уравнение  $9x^2 - 6x + 1 = 0$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{l|l} a = 9 & \text{Вычислим дискриминант } D = b^2 - 4ac. \\ b = -6 & D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0. D = 0, \\ c = 1 & \text{поэтому исходное уравнение имеет один корень:} \end{array}$$

$$x = -\frac{b}{2a}, \quad x = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{3}$ .

18. Решите уравнение  $3x^2 - 4x + 3 = 0$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{l|l} a = 3 & \text{Вычислим дискриминант } D = b^2 - 4ac. \\ b = -4 & D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 16 - 36 = -20. D < 0, \\ c = 3 & \text{поэтому исходное уравнение корней не имеет.} \end{array}$$

*Ответ:* корней нет.

## Приведённое квадратное уравнение. Теорема Виета

### ① Немного полезной информации

Квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  называется **приведённым**, если  $a = 1$ .

Пусть  $x^2 + px + q = 0$  — приведённое квадратное уравнение, где  $p$  и  $q$  — некоторые числа. Если  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения, то справедливы формулы (теорема Виета)

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Справедливо и обратное утверждение. Если  $x_1$  и  $x_2$  — некоторые числа, при этом  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 \cdot x_2 = q$ , то уравнение  $x^2 + px + q = 0$  имеет корни  $x_1$  и  $x_2$ , причём других корней нет (теорема, обратная теореме Виета).

### ☞ Задачи с решениями

19. Известно, что уравнение  $x^2 + 9x - 10 = 0$  имеет корни. Найдите сумму и произведение корней этого уравнения.

*Решение.*

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -9,$$

$$x_1 \cdot x_2 = -10.$$

Значит,  $x_1 = -10$ ,  $x_2 = 1$ .

*Ответ:*  $-10; 1$ .

**20.** Составьте квадратное уравнение, корнями которого были бы числа 3 и  $-5$ .

*Решение.*

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -2,$$

$$x_1 \cdot x_2 = -15.$$

Напишем приведённое квадратное уравнение, в котором второй коэффициент  $p = 2$ , а свободный член  $q = -15$ :

$$x^2 + 2x - 15 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета, числа 3 и  $-5$  являются корнями составленного уравнения.

*Ответ:*  $x^2 + 2x - 15 = 0$ .

### Координатная прямая

#### ① Немного полезной информации

Иногда числа обозначают на координатной прямой. В математике принято числовую прямую направлять слева направо. То число, которое правее, то и больше. Например, на рисунке 5 видно, что  $b > a$ .

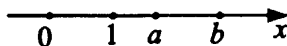


Рис. 5

Рассмотрим несколько задач, в которых встречается координатная прямая.



### Задачи с решениями

21. На координатной прямой отмечены числа  $a$  и  $b$  (см. рис. 6). Какое из следующих чисел наибольшее?

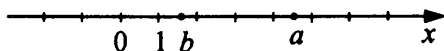


Рис. 6

- 1)  $a$                       2)  $b$                       3)  $3b$                       4)  $a + 2$

*Решение.*

Заметим, что  $1 < b < 2$ ,  $4 < a < 5$  (см. рис. 7).

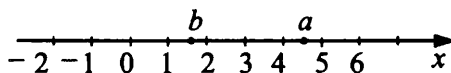


Рис. 7

Тогда,  $3 < 3b < 6$ ,  $6 < a + 2 < 7$ , то есть  $3b < 6 < a + 2$ .

Наибольшее число — это  $(a + 2)$ .

*Ответ:* 4.

22. На координатной прямой отмечены точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$  и  $L$  (см. рис. 8). Одна из них соответствует числу  $\sqrt{500}$ . Какая это точка?

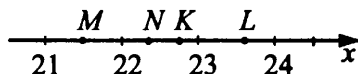


Рис. 8

- 1)  $M$                       2)  $N$                       3)  $K$                       4)  $L$

*Решение.*

Заметим, что  $21^2 = 441$ ,  $22^2 = 484$ ,  $23^2 = 529$ ,  $24^2 = 576$ ,  $(\sqrt{500})^2 = 500$ . При этом  $484 < 500 < 529$ , а значит,  $22 < \sqrt{500} < 23$ . На координатной прямой между отметка-

ми 22 и 23 лежат точки  $N$  и  $K$ . При этом  $N < 22,5$ ;  $K > 22,5$ .

Заметим, что  $22,5 = \frac{45}{2}$ ,  $\left(\frac{45}{2}\right)^2 = \frac{2025}{4}$ . Сравним числа  $\frac{2025}{4}$

и 500. Очевидно, что  $500 \cdot 4 = 2000$ ,  $\frac{2025}{4} > \frac{2000}{4}$ , тогда

$\frac{45}{2} > \sqrt{500}$ ,  $\sqrt{500} < 22,5$ . Значит,  $\sqrt{500}$  соответствует точке  $N$ .

*Ответ: 2.*

## Неравенства

### ① Немного полезной информации

**Линейным неравенством** называется неравенство вида  $ax + b > 0$ ,  $ax + b < 0$ ,  $ax + b \geq 0$  или  $ax + b \leq 0$ , где  $x$  — переменная,  $a$  и  $b$  — некоторые числа, причём  $a \neq 0$ .

Для решения неравенства  $ax + b > 0$  сначала перенесём слагаемое  $b$  в правую часть:  $ax > -b$ . Далее разделим обе части неравенства на  $a$ . При этом следует учитывать знак  $a$ :

- если  $a > 0$ , то при делении неравенство сохраняет знак:

$$x > -\frac{b}{a}, \text{ то есть } x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right);$$

- если  $a < 0$ , то при делении неравенство меняет знак на противоположный:

$$x < -\frac{b}{a}, \text{ то есть } x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right).$$

Аналогично решаются неравенства  $ax + b < 0$ ,  $ax + b \geq 0$ ,  $ax + b \leq 0$ .

### ☛ Задачи с решениями

23. Решите неравенство  $5x - 3 < 7x - 17$ .

*Решение.*

Перенесём в левую часть все слагаемые, содержащие переменную, а в правую — свободные члены:

$$5x - 7x < 3 - 17,$$

$$-2x < -14.$$

Разделим обе части на  $(-2)$ , знак неравенства при этом изменится на противоположный:

$$x > 7 \text{ (см. рис. 9).}$$

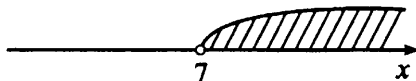


Рис. 9

*Ответ:*  $(7; +\infty)$ .

### ① Немного полезной информации

**Квадратное неравенство** — это неравенство вида  $ax^2 + bx + c > 0$ ,  $ax^2 + bx + c < 0$ ,  $ax^2 + bx + c \geq 0$  или  $ax^2 + bx + c \leq 0$ , где  $x$  — переменная,  $a$ ,  $b$  и  $c$  — некоторые числа, причём  $a \neq 0$ .

Покажем решение квадратных неравенств на примерах.

### ☛ Задачи с решениями

24. Решите неравенство  $2x^2 + 11x - 6 > 0$ .

*Решение.*

1. Решим уравнение  $2x^2 + 11x - 6 = 0$ .

$$\begin{array}{l|l}
 a = 2 & D = b^2 - 4ac. \\
 b = 11 & D = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 121 + 48 = 169, D > 0, \\
 c = -6 & x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 2} = \frac{-11 \pm 13}{4}; \\
 & x_1 = \frac{-11 - 13}{4} = -6; x_2 = \frac{-11 + 13}{4} = \frac{2}{4} = 0,5.
 \end{array}$$

2. Графиком функции  $y = 2x^2 + 11x - 6$  является парабола, ветви которой направлены вверх ( $a = 2 > 0$ ). Парабола пересекает ось  $Ox$  в двух точках, абсциссы которых 0,5 и  $-6$  (см. рис. 10).

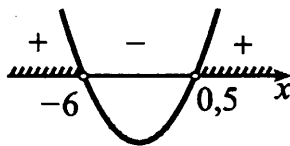


Рис. 10

3. Вывод: данное неравенство выполняется, если  $x < -6$  и  $x > 0,5$ .

*Ответ:*  $(-\infty; -6) \cup (0,5; +\infty)$ .

Покажем, как можно записывать решение квадратного неравенства, если вид графика анализировать устно.

25. Решите неравенство  $x^2 - 11x + 24 < 0$ .

*Решение.*

Решим уравнение  $x^2 - 11x + 24 = 0$ .

$$\begin{array}{l|l}
 p = -11 & \text{По теореме, обратной теореме Виета, имеем} \\
 q = 24 & x_1 + x_2 = 11, x_1 \cdot x_2 = 24. \\
 & \text{Следовательно,} \\
 & x_1 = 3, x_2 = 8.
 \end{array}$$

Вывод: данное неравенство выполняется, если  $3 < x < 8$  (см. рис. 11).

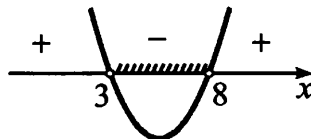


Рис. 11

*Ответ:*  $(3; 8)$ .

26. Решите неравенство  $-3x^2 + 16x - 5 \geq 0$ . В ответе укажите наибольшее целое решение неравенства.

*Решение.*

Решим уравнение  $3x^2 - 16x + 5 = 0$ .

$$\begin{array}{l|l} a = 3 & D = b^2 - 4ac. \\ b = -16 & D = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 196, D > 0. \\ c = 5 & x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{16 \pm 14}{6}; \end{array}$$

$$x_1 = \frac{16 - 14}{6} = \frac{1}{3}; x_2 = \frac{16 + 14}{6} = 5.$$

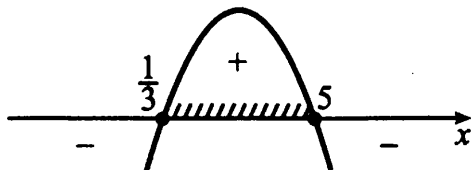


Рис. 12

$\frac{1}{3} \leq x \leq 5$  (см. рис. 12). Наибольшее целое решение неравенства равно 5.

*Ответ:* 5.

27. Решите неравенство  $x^2 - x + 5 > 0$ .

*Решение.*

Решим уравнение  $x^2 - x + 5 = 0$ .

$$\begin{array}{l|l} a = 1 & D = b^2 - 4ac. \\ b = -1 & D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 1 - 20 = -19, D < 0. \\ c = 5 & \end{array}$$

Уравнение  $x^2 - x + 5 = 0$  корней не имеет, значит, график функции  $y = x^2 - x + 5$  не пересекает ось  $Ox$  (см. рис. 13).

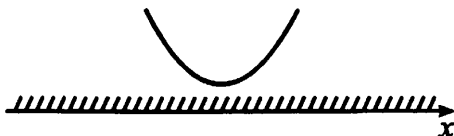


Рис. 13

Учитывая, что  $a = 1 > 0$ , неравенство  $x^2 - x + 5 > 0$  выполняется при любом значении  $x$ .

*Ответ:*  $(-\infty; \infty)$ .

Заметим, что если коэффициент при  $x^2$  отрицательный ( $a < 0$ ), то обе части неравенства можно умножить на  $(-1)$ , изменив знак неравенства на противоположный, и тогда ветви параболы будут направлены вверх.

28. Решите неравенство  $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$ .

*Решение.*

$$-4x^2 + 12x - 9 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$4x^2 - 12x + 9 \leq 0.$$

Решим уравнение  $4x^2 - 12x + 9 = 0$ .

$$a = 4$$

$$D = b^2 - 4ac.$$

$$b = -12$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0,$$

$$c = 9$$

$$x = -\frac{b}{2a}, \quad x = \frac{12}{2 \cdot 4} = 1,5.$$

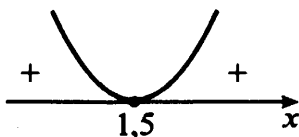


Рис. 14

Учитывая, что  $a = 4 > 0$ , неравенство  $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$  выполняется только при  $x = 1,5$  (см. рис. 14).

*Ответ:* 1,5.

Покажем решение неравенств **методом интервалов**.

29. Решите неравенство  $x^2 - 4x - 21 \geq 0$ .

*Решение.*

1) Разложим левую часть неравенства на множители. Для этого решим уравнение  $x^2 - 4x - 21 = 0$ .  $x = 7$  и  $x = -3$  — корни уравнения. Неравенство примет вид  $(x + 3)(x - 7) \geq 0$ .

2) Нанесём числа  $-3$  и  $7$  на прямую. Учитывая, что неравенство нестрогое, закрасим точки (см. рис. 15).

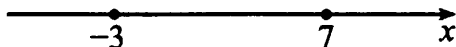


Рис. 15

3) Так как  $a = 1 > 0$ , то на крайнем правом промежутке поставим знак «+» (можно из любого промежутка взять число и подставить в левую часть неравенства, например, если  $x = 10$ , получим  $100 - 40 - 21 = 39 > 0$ ) (см. рис. 16).

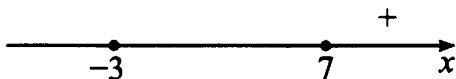


Рис. 16

4) Так как множители  $(x + 3)$  и  $(x - 7)$  в нечётной степени (в первой), то на остальных промежутках знаки чередуем и рисуем «змейку» (см. рис. 17).



Рис. 17

5) Левая часть неравенства больше или равна 0, значит, выделяем промежутки со знаком «+» (см. рис. 18).



Рис. 18

6) Делаем вывод:  $x \leq -3$ ,  $x \geq 7$ .

Ответ:  $(-\infty; -3] \cup [7; +\infty)$ .

30. Решите неравенство  $7x^2 - 12x + 5 < 0$ .

Решение.

$7x^2 - 12x + 5 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{5}{7}$  — корни уравнения.

$$7(x-1)\left(x - \frac{5}{7}\right) < 0 \quad | : 7$$

$$(x-1)\left(x - \frac{5}{7}\right) < 0.$$

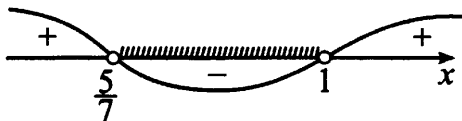


Рис. 19

$\frac{5}{7} < x < 1$  (см. рис. 19).

Ответ:  $\left(\frac{5}{7}; 1\right)$ .

31. Решите неравенство  $-x^2 - 8x + 9 > 0$ .

Решение.

Умножим обе части неравенства на  $(-1)$ .

$$x^2 + 8x - 9 < 0,$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0,$$

$x_1 = 1$ ,  $x_2 = -9$  — корни уравнения.

$$(x+9)(x-1) < 0.$$

$-9 < x < 1$  (см. рис. 20).

Ответ:  $(-9; 1)$ .



Рис. 20



32. Решите неравенство  $x^2 - 6x + 9 > 0$ .

*Решение.*

Заметим, что левая часть неравенства — полный квадрат, то есть  $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ . Неравенство примет вид  $(x - 3)^2 > 0$ , отсюда решение этого неравенства — любое число, кроме  $x = 3$ , так как неравенство строгое.

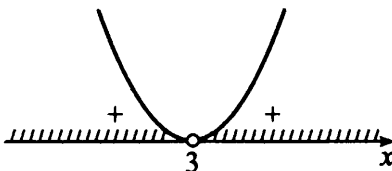


Рис. 21

$x < 3$  и  $x > 3$  (см. рис. 21).

*Ответ:*  $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ .

33. Решите неравенство  $\frac{3x - 6}{x + 4} \geq 0$ .

*Решение.*

Нули числителя:  $3x - 6 = 0$ ,  $x = 2$ .

Нули знаменателя:  $x + 4 = 0$ ,  $x = -4$ .



Рис. 22

$x < -4$ ,  $x \geq 2$  (см. рис. 22).

*Ответ:*  $(-\infty; -4) \cup [2; \infty)$ .



2) Решим второе неравенство:  $3x - 9 \leq 0$ ,  $3x \leq 9$ ,  $x \leq 3$ .

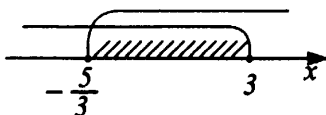


Рис. 24

3) На координатной прямой (см. рис. 24) обозначены дугами решения каждого из неравенств. Заштрихуем их общую часть. При этом обратим внимание, что число 3 входит в решение, а  $-\frac{5}{3}$  — нет. Из предложенных в условии подходит координатная прямая под номером 4.

Ответ: 4.

### ❓ Варианты для самостоятельного решения

#### Вариант 1

1. Найдите корень уравнения  $2 - 3x = 4(1 - x)$ .
2. Найдите корень уравнения  $\sqrt{x + 2}(2x - 5) = 0$ . Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.
3. Найдите сумму корней уравнения  $x^2 - 2x - 15 = 0$ .
4. Решите неравенство  $3(4 + 2x) > 24$ . В ответе укажите наименьшее целое решение этого неравенства.
5. Решите неравенство  $2(x - 4)(x + 5) < 0$ , в ответе укажите длину промежутка, являющегося решением данного неравенства.

6. На координатной прямой отмечены числа  $a$  и  $b$  (см. рис. 25).  
Какое из чисел наименьшее?

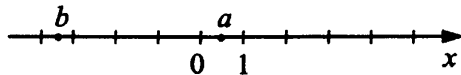


Рис. 25

- 1)  $-a$                       2)  $b$                       3)  $a - b$                       4)  $b - a$

### Вариант 2

1. Найдите корень уравнения  $7 - x = 2(1 - 3x)$ .
2. Найдите корень уравнения  $\sqrt{x + 4}(5x - 10) = 0$ . Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.
3. Найдите сумму корней уравнения  $x^2 - 4x - 21 = 0$ .
4. Решите неравенство  $14 + 4(3 - x) \leq -2(5 - x)$ , в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.
5. Решите неравенство  $3(x + 1)(4 - x) > 0$ , в ответе укажите наибольшее целое решение неравенства.
6. На координатной прямой отмечены числа  $a$  и  $b$  (см. рис. 26).  
Какое из чисел наибольшее?

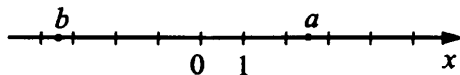


Рис. 26

- 1)  $a + 1$                       2)  $a - b$                       3)  $8b$                       4)  $-5b$

## Вариант 3

1. Найдите корень уравнения  $1 - 5x = 3(7 - x)$ .
2. Найдите корень уравнения  $\sqrt{x + 7}(3x - 6) = 0$ . Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.
3. Найдите произведение корней уравнения  $x^2 - 2x - 8 = 0$ .
4. Решите систему неравенств  $\begin{cases} 2x + 15 > 0, \\ 7x - 14 > 0. \end{cases}$  На какой из координатных прямых изображено множество решений системы (см. рис. 27)?

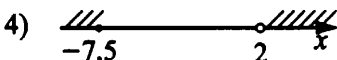
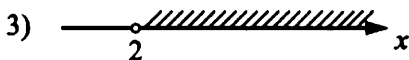
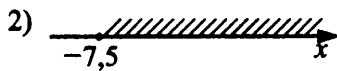
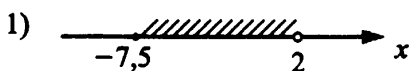


Рис. 27

5. Решите неравенство  $5(x - 6)(x + 7) < 0$ , в ответе укажите длину промежутка, являющегося решением данного неравенства.
6. На координатной прямой отмечено число  $a$  (см. рис. 28). Какое из утверждений относительно этого числа является верным?

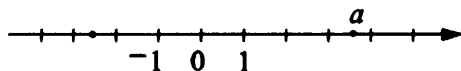


Рис. 28

- 1)  $a - 3 < 0$     2)  $2a - 5 < 0$     3)  $2 - a > 0$     4)  $4 - a > 0$

## Вариант 4

1. Найдите корень уравнения  $13x - 6 = 2(5 + 7x)$ .
2. Найдите корень уравнения  $\sqrt{2x - 5}(x - 1) = 0$ . Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.
3. Найдите произведение корней уравнения  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ .
4. Решите неравенство  $(x - 9)(3 - x) > 0$ , в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.
5. Решите систему неравенств  $\begin{cases} 7x + 105 \geq 0, \\ 8x - 32 < 0. \end{cases}$  На какой из координатных прямых изображено множество решений системы (см. рис. 29)?

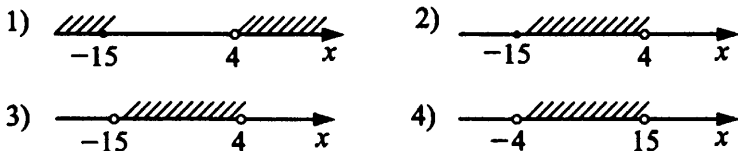


Рис. 29

6. На координатной прямой отмечены числа  $a$  и  $b$  (см. рис. 30). Какое из утверждений относительно этих чисел является верным?

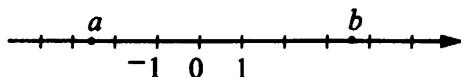


Рис. 30

- 1)  $b + a < 0$
- 2)  $b + 8a > 0$
- 3)  $5 - a > b$
- 4)  $2a - b > 0$

## Вариант 5

1. Найдите корень уравнения  $5 - 2x = 3(10 + x)$ .
2. Найдите корень уравнения  $\sqrt{x + 3(5x - 6)} = 0$ . Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.
3. Найдите произведение корней уравнения  $3x^2 - 13x + 12 = 0$ .
4. Решите неравенство  $3(x - 2) - 2 > 4 - x$ , в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.
5. Решите систему неравенств  $\begin{cases} 2x - 5 < 0, \\ 7x + 28 > 0. \end{cases}$  На какой из координатных прямых изображено множество решений системы (см. рис. 31)?

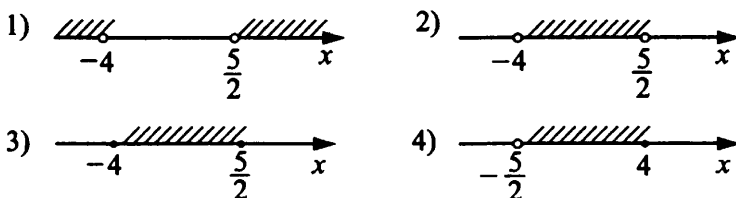


Рис. 31

6. Решите неравенство  $x^2 + 3x - 10 \leq 0$ , в ответе укажите количество целочисленных решений неравенства.

## Вариант 6

1. Найдите корень уравнения  $6 + 2x = 7(x + 3)$ .
2. Найдите корень уравнения  $\sqrt{x - 9}(2x - 3) = 0$ . Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.
3. Найдите произведение корней уравнения  $x^2 - 2x - 15 = 0$ .
4. Решите неравенство  $2(x + 3) - 11 < 3(4x + 15)$ , в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.
5. Решите неравенство  $(8 - 4x)(x + 2) \geq 0$ , в ответе укажите наибольшее целое решение неравенства.
6. Решение какой из представленных систем неравенств соответствует рисунку 32?

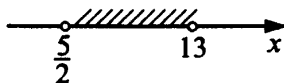


Рис. 32

- |  |  |
|--|--|
| $1) \begin{cases} x < \frac{5}{2}, \\ x > 13; \end{cases}$ | $2) \begin{cases} x + 13 > 0, \\ x - \frac{5}{2} < 0; \end{cases}$ |
| $3) \begin{cases} 2x - 5 < 0, \\ x - 13 < 0; \end{cases}$  | $4) \begin{cases} 2x - 5 > 0, \\ x - 13 < 0. \end{cases}$          |



## Глава 4. Числовые последовательности

### ① Немного полезной информации

- Любые записанные подряд  $n$  чисел образуют **числовую последовательность**. Её обозначают  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .

Например:

7, 10, 10, 13 — числовая последовательность, где  $a_1 = 7$ ,  $a_2 = 10$ ,  $a_3 = 10$ ,  $a_4 = 13$ .

- Иногда последовательности задают, указывая её **первый член** и **формулу**, позволяющие найти любой другой член последовательности, зная предыдущие члены. Такой способ задания последовательности называют **рекуррентным**.

### ☞ Задачи с решениями

1. Найдите пятый член последовательности  $c_n$ , если  $c_1 = -6$ ,  $c_{n+1} = c_n + 3$ .

*Решение.*

Последовательность задана рекуррентным способом, поэтому по очереди найдём её члены со второго по пятый.

$$c_2 = c_1 + 3 = -6 + 3 = -3,$$

$$c_3 = c_2 + 3 = -3 + 3 = 0,$$

$$c_4 = c_3 + 3 = 0 + 3 = 3,$$

$$c_5 = c_4 + 3 = 3 + 3 = 6.$$

*Ответ:* 6.

## Арифметическая прогрессия

### ① Немного полезной информации

- Пусть дана бесконечная числовая последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ . Если равенство  $a_{n+1} = a_n + d$  выполняется для всех натуральных  $n$ , то такая последовательность называется **арифметической прогрессией**.
- Число  $d = a_{n+1} - a_n$  называют **разностью арифметической прогрессии**.  
Например, натуральный ряд чисел  $1, 2, 3, \dots$  является арифметической прогрессией. Разность этой прогрессии  $d = 3 - 2 = 1$ .
- $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$  — формула  $n$ -го члена арифметической прогрессии.

### ☞ Задачи с решениями

2. Дана арифметическая прогрессия, в которой  $a_3 = 7$ ,  $a_4 = 12$ . Найдите разность этой прогрессии.

*Решение.*

$$d = a_4 - a_3 = 12 - 7 = 5.$$

*Ответ:* 5.

3. Найдите десятый член арифметической прогрессии, если известно, что  $a_1 = -2$  и  $d = -3$ .

*Решение.*

По формуле  $a_n = a_1 + d(n - 1)$  найдём

$$a_{10} = -2 + (-3)(10 - 1) = -29.$$

*Ответ:*  $-29$ .

4. Найдите первый член арифметической прогрессии, если  $d = 5$ ,  $a_9 = 12$ .

*Решение.*

$$a_9 = a_1 + 5(9 - 1),$$

$$12 = a_1 + 5 \cdot 8,$$

$$a_1 = 12 - 5 \cdot 8 = 12 - 40 = -28.$$

*Ответ:*  $-28$ .

5. Запишите первые пять членов арифметической прогрессии, в которой

а)  $a_1 = 3$ ,  $d = 4$ .

б)  $a_1 = 12$ ,  $d = -2$ .

*Решение.*

а)  $a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7$ ,

$$a_3 = a_2 + d = 7 + 4 = 11,$$

$$a_4 = a_3 + d = 11 + 4 = 15,$$

$$a_5 = a_4 + d = 15 + 4 = 19.$$

б)  $a_2 = a_1 + d = 12 + (-2) = 10$ ,

$$a_3 = a_2 + d = 10 + (-2) = 8,$$

$$a_4 = a_3 + d = 8 + (-2) = 6,$$

$$a_5 = a_4 + d = 6 + (-2) = 4.$$

*Ответ:* а) 3, 7, 11, 15, 19;

б) 12, 10, 8, 6, 4.

## Свойства арифметической прогрессии

### ① Немного полезной информации

- Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

- Сумма  $n$  первых членов арифметической прогрессии ( $S_n$ ):

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{или } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

### ☞ Задачи с решениями

6. Задана арифметическая прогрессия  $49, 2x, 51, \dots$ .

Найдите  $x$ .

*Решение.*

Так как каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов, то

$$2x = \frac{49 + 51}{2}, \quad 2x = 50, \quad x = 25.$$

*Ответ:* 25.

7. Найдите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии, у которой  $a_1 = 7$ ,  $a_2 = 10$ ,  $a_3 = 13$ .

*Решение.*

Найдём разность арифметической прогрессии  $d = a_2 - a_1$ ,  
 $d = 10 - 7 = 3$ .

Найдём  $a_4$  и  $a_5$ :  $a_4 = a_3 + d$ ,  $a_4 = 13 + 3 = 16$ ;

$$a_5 = a_4 + d, a_5 = 16 + 3 = 19.$$

$$S_5 = 7 + 10 + 13 + 16 + 19 = 65.$$

*Ответ:* 65.

8. Дана арифметическая прогрессия: 5, 11, 17, ... . Найдите сумму первых семи её членов.

*Решение.*

Зная, что  $a_1 = 5$  и  $a_2 = 11$ , найдём разность арифметической прогрессии  $d = a_2 - a_1$ ,  $d = 11 - 5 = 6$ .

По формуле  $a_n = a_1 + d(n - 1)$  найдём  $a_7$ .

$$a_7 = 5 + 6(7 - 1) = 5 + 6 \cdot 6 = 5 + 36 = 41.$$

Сумму первых семи членов арифметической прогрессии найдём по формуле  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ .

Так как  $a_1 = 5$ ,  $a_7 = 41$ ,  $n = 7$ , то получим

$$S_7 = \frac{5 + 41}{2} \cdot 7 = \frac{46}{2} \cdot 7 = 23 \cdot 7 = 161.$$

*Ответ:* 161.

9. Последовательность задана формулой  $a_{n+1} = a_n + 2$  и условием  $a_1 = 5$ . Найдите сумму первых шести членов этой последовательности.

*Решение.*

По определению числовая последовательность, заданная формулой  $a_{n+1} = a_n + 2$ , является арифметической прогрессией с разностью 2.

Сумму первых шести членов арифметической прогрессии найдём по формуле

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Имеем  $a_1 = 5$ ,  $n = 6$  и  $d = 2$ . Следовательно,

$$S_6 = \frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot (6-1)}{2} \cdot 6 = \frac{10 + 10}{2} \cdot 6 = 60.$$

Ответ: 60.

## Геометрическая прогрессия

### ① Немного полезной информации

- Пусть дана бесконечная числовая последовательность  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ . Если выполняется равенство  $b_{n+1} = b_n \cdot q$  для всех натуральных  $n$  и  $q \neq 0$ , то такая последовательность называется **геометрической прогрессией**.

- Число  $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$  называют **знаменателем** геометрической прогрессии.

Например, последовательность чисел 1, 3, 9, 27, 81, ... является геометрической прогрессией. Знаменатель прогрессии  $q = 9 : 3 = 3$ .

- $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$  — формула  $n$ -ого члена геометрической прогрессии.

### ☞ Задачи с решениями

10. Дана геометрическая прогрессия 2, 6, 18, ... . Найдите знаменатель прогрессии.

*Решение.*

$$b_1 = 2, \quad b_2 = 6, \quad q = \frac{b_2}{b_1}, \quad q = \frac{6}{2} = 3.$$

*Ответ:* 3.

11. Найдите пятый член геометрической прогрессии, если

$$b_1 = 128 \text{ и } q = \frac{1}{2}.$$

*Решение.*

По формуле  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$  найдём

$$b_5 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 128 \cdot \frac{1}{16} = 8.$$

*Ответ:* 8.

12. Запишите пять первых членов геометрической прогрессии, если заданы  $b_1$  и  $q$ .

а)  $b_1 = 4, \quad q = 2;$

б)  $b_1 = -4, \quad q = 2;$

в)  $b_1 = 4, \quad q = -2;$

г)  $b_1 = -4, \quad q = -2.$

*Решение.*

а) Если  $b_1 = 4, \quad q = 2$ , то  $b_2 = 4 \cdot 2 = 8, \quad b_3 = 4 \cdot 2^2 = 16,$   
 $b_4 = 4 \cdot 2^3 = 32, \quad b_5 = 4 \cdot 2^4 = 64.$

б) Если  $b_1 = -4, \quad q = 2$ , то  $b_2 = -4 \cdot 2 = -8,$   
 $b_3 = -4 \cdot 2^2 = -16, \quad b_4 = -4 \cdot 2^3 = -32, \quad b_5 = -4 \cdot 2^4 = -64.$

в) Если  $b_1 = 4, \quad q = -2$ , то  $b_2 = 4 \cdot (-2) = -8,$   
 $b_3 = 4 \cdot (-2)^2 = 16, \quad b_4 = 4 \cdot (-2)^3 = -32, \quad b_5 = 4 \cdot (-2)^4 = 64.$

г) Если  $b_1 = -4$ ,  $q = -2$ , то  $b_2 = -4 \cdot (-2) = 8$ ,  
 $b_3 = -4 \cdot (-2)^2 = -16$ ,  $b_4 = -4 \cdot (-2)^3 = 32$ ,  
 $b_5 = -4 \cdot (-2)^4 = -64$ .

Ответ: а) 4, 8, 16, 32, 64;

б) -4, -8, -16, -32, -64;

в) 4, -8, 16, -32, 64;

г) -4, 8, -16, 32, -64.

13. Найдите пятый член геометрической прогрессии, если

$$b_1 = \frac{1}{3}, b_4 = 9.$$

Решение.

Так как  $b_4 = b_1 \cdot q^3$ , то  $9 = \frac{1}{3} \cdot q^3$ ,  $q^3 = 27$ ,  $q = 3$ .

$$b_5 = b_4 \cdot q = 9 \cdot 3 = 27.$$

Ответ: 27.

## ① Немного полезной информации

### Свойства геометрической прогрессии

- Числовая последовательность, члены которой отличны от нуля, является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого её члена, кроме первого, равен произведению предыдущего и последующего членов.

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, n \geq 2.$$

- Сумма  $n$  первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$



**8** *Задачи с решениями*

14. Задана геометрическая прогрессия: 2,  $x$ , 18, ... .

Найдите  $x$ .

*Решение.*

Так как последовательность 2,  $x$ , 18, ... по условию является геометрической прогрессией, то по свойству геометрической прогрессии запишем

$$x^2 = 2 \cdot 18,$$

$$x^2 = 36,$$

$$x_1 = 6, \quad x_2 = -6.$$

*Ответ:* 6; -6.

15. Дана геометрическая прогрессия 3, 6, 12, ... . Найдите сумму первых шести её членов.

*Решение.*

По условию  $b_1 = 3$ ,  $b_2 = 6$ , знаменатель геометрической прогрессии  $q = b_2 : b_1$ ,  $q = 6 : 3 = 2$ .

По формуле  $S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1}$  находим

$$S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot (64 - 1) = 3 \cdot 63 = 189.$$

*Ответ:* 189.

16. Геометрическая прогрессия задана формулой  $n$ -ого члена:  $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ . Найдите сумму первых пяти её членов.

*Решение.*

В этой прогрессии  $b_1 = 2 \cdot 3^{1-1} = 2$ ,  $b_2 = 2 \cdot 3^{2-1} = 6$ ,  
 $q = b_2 : b_1 = 6 : 2 = 3$ ,  $n = 5$ .

По формуле  $S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1}$  находим

$$S_5 = \frac{2(3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{2 \cdot (243 - 1)}{2} = 242.$$

*Ответ:* 242.

17. В геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \frac{1}{2}$  сумма первых четырёх членов равна 60. Найдите первый член этой прогрессии.

*Решение.*

Воспользуемся формулой  $S_4 = \frac{b_1(q^4 - 1)}{q - 1}$ :

$$\frac{b_1 \cdot \left( \left( \frac{1}{2} \right)^4 - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 60, \quad \frac{b_1 \cdot \left( \frac{1}{16} - 1 \right)}{-\frac{1}{2}} = 60, \quad b_1 \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{2}{1} = 60,$$

$$b_1 = \frac{60 \cdot 16}{15 \cdot 2} = 32.$$

*Ответ:* 32.

**?** *Варианты для самостоятельного решения***Вариант 1**

1. В арифметической прогрессии найдите  $a_9$ , если  $a_1 = -4$ ,  $d = 5$ .
2. Последовательность задана формулой  $a_{n+1} = a_n - 3$  и условием  $a_1 = 7$ . Найдите сумму первых десяти членов этой последовательности.
3. Дана геометрическая прогрессия 2; 6; 18; ... . Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

**Вариант 2**

1. Дана арифметическая прогрессия 9; 11; 13; ... . Найдите сумму первых шести её членов.
2. В геометрической прогрессии заданы  $b_1 = 48$  и  $q = \frac{1}{2}$ . Найдите пятый член прогрессии.
3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, заданной формулой  $n$ -го члена  $b_n = \frac{2}{3} \cdot 5^n$ .

**Вариант 3**

1. Найдите первый член арифметической прогрессии, если  $d = -4$ ,  $a_7 = -21$ .
2. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии  $-1; 3; -9; \dots$ .
3. Найдите разность арифметической прогрессии, заданной формулой  $n$ -го члена  $a_n = -2n + 8$ .

**Вариант 4**

1. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, если известно, что  $a_1 = -14$ ,  $a_{10} = -6$ .
2. Дана геометрическая прогрессия  $-3; 6; -12; \dots$ . Найдите шестой член прогрессии.
3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, заданной формулой  $n$ -го члена  $b_n = -8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

**Вариант 5**

1. В арифметической прогрессии найдите  $a_5$ , если  $a_2 = 5$ ,  $d = 3$ .
2. Дана геометрическая прогрессия  $3; -6; 12; \dots$ . Найдите сумму первых семи её членов.
3. Составьте формулу  $n$ -го члена арифметической прогрессии  $2; 7; 12; 17; \dots$ .

**Вариант 6**

1. Дана арифметическая прогрессия  $18; 14; 10; \dots$ . Какое число стоит в этой последовательности на 25-м месте?
2. Геометрическая прогрессия задана условиями  $b_1 = 5$ ,  $b_{n+1} = 3b_n$ . Найдите сумму первых пяти её членов.
3. В геометрической прогрессии  $b_5 = 48$ ,  $b_7 = 192$ . Найдите  $b_6$ .

## Глава 5. Графики и функции

### Понятие графика. Простейшие задачи

#### ① Немного полезной информации

Областью определения функции  $y = f(x)$  называется множество всех значений аргумента  $x$ , для которых выражение  $f(x)$  определено (имеет смысл). Например, область определения функций  $y = x^2 + x + 1$  и  $y = \sqrt[3]{x}$  — все действительные числа, область определения функции  $y = \frac{1}{x-1}$  — все действительные числа, кроме 1 (так как при  $x = 1$  знаменатель дроби  $\frac{1}{x-1}$  равен нулю и выражение не имеет смысла), область определения функции  $y = \sqrt{x}$  — все неотрицательные числа (то есть  $x \geq 0$ ).

Каждая функция, заданная при помощи формулы, имеет в прямоугольной системе координат  $Oxy$  свой график. **Графиком функции**  $y = f(x)$  называют множество точек координатной плоскости  $Oxy$  вида  $(x; f(x))$ , где  $x$  — любое число из области определения функции.

Часто встречаются задания, в которых необходимо установить соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают. Для решения таких заданий следует

- определить общий вид графика, задаваемого каждой формулой;
- если среди предложенных вариантов содержится несколько графиков нужного типа, проверить соответствие формул и графиков по точкам.

Рассмотрим графики некоторых элементарных функций.

### Прямая

График функций, заданных формулой вида  $y = kx + b$ , — прямая.

Рассмотрим разные случаи расположения прямой в зависимости от значений коэффициентов  $k$  и  $b$  в формуле (см. рис. 33).

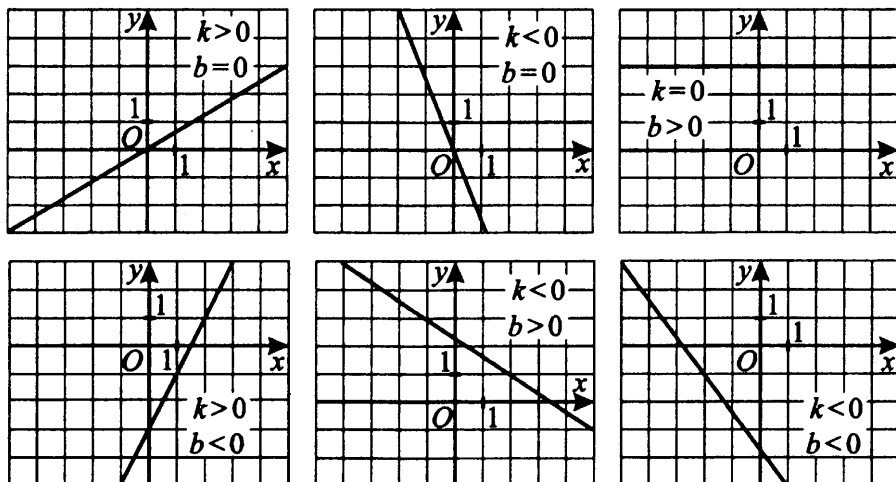


Рис. 33

Коэффициент  $k$  определяет угол наклона прямой. При  $k = 0$  функция имеет вид  $y = b$ , её график параллелен оси абсцисс (оси  $Ox$ ). При  $k > 0$  прямая уходит вправо и вверх: при возрастании  $x$  значение функции  $y = kx + b$  также возрастает. При  $k < 0$  прямая уходит вправо и вниз: при возрастании  $x$  значение функции  $y = kx + b$  убывает.

Коэффициент  $b$  определяет, в каком месте график пересечёт ось ординат (ось  $Oy$ ). При  $b = 0$  получаем функцию

$y = kx$ . Её график — прямая, проходящая через начало координат. Действительно, точка  $(0; 0)$  принадлежит графику функции  $y = kx$ , так как  $0 = k \cdot 0$ . При  $b > 0$  функция пересекает ось ординат выше оси абсцисс, а при  $b < 0$  — ниже оси абсцисс. Действительно, точке пересечения графика и оси ординат соответствует точка графика с абсциссой  $x = 0$ , то есть точка  $(0; b)$ . В зависимости от знака  $b$  эта точка находится выше или ниже оси абсцисс.

### ☞ Задачи с решениями

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 34) и формулами, которые их задают.

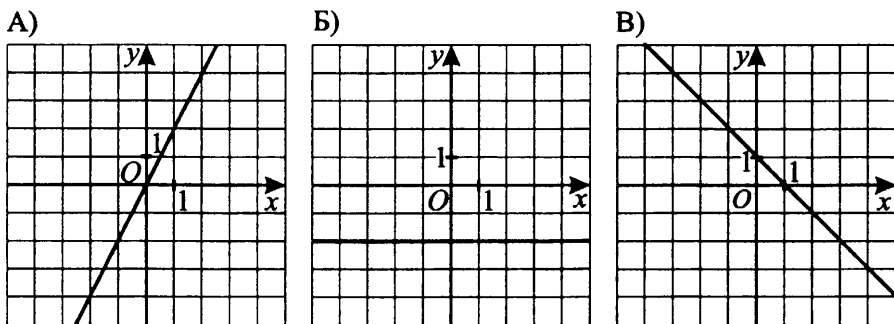


Рис. 34

- 1)  $y = -2x + 1$     2)  $y = 2x$     3)  $y = -x + 1$     4)  $y = -2$

*Решение.* Все три графика — прямые, то есть заданы формулами вида  $y = kx + b$ .

Для графика А выполняется  $b = 0$ , так как прямая проходит через начало координат. Из предложенных вариантов ему соответствует формула  $y = 2x$  (2).

График Б параллелен оси абсцисс, поэтому  $k = 0$ , из предло-

женных вариантов ему соответствует формула  $y = -2$  (4). Для В выполняется  $k < 0$  и  $b > 0$ , то есть ему могут соответствовать формулы  $y = -2x + 1$  (1) или  $y = -x + 1$  (3). Найдём подходящую формулу по двум точкам. График В проходит через точки плоскости с координатами (0; 1) и (1; 0). Подставим в формулы значения координат этих точек: для формулы 1 получаем при  $x = 0$ ,  $y = 0 + 1 = 1$ ; при  $x = 1$   $y = -2 + 1 = -1$ , ей график соответствовать не может. Для формулы 3 получаем:  $x = 0$ ,  $y = 0 + 1 = 1$ ; при  $x = 1$   $y = -1 + 1 = 0$ , следовательно, график В соответствует формуле 3.

Ответ:

А	Б	В
2	4	3

*Замечание.* Любая прямая задаётся двумя точками, поэтому для проверки соответствия формулы и графика достаточно подставить в формулу координаты двух точек графика (при условии, что формула задаёт прямую и график является тоже прямой).

## Парабола

### ① Немного полезной информации

График функции, заданной формулой вида  $y = ax^2 + bx + c$  или  $y = a(x - m)^2 + n$ , где  $a \neq 0$ , — парабола. Вершина параболы находится в точке с абсциссой, равной  $m = -\frac{b}{2a}$ , и в зависимости от знака параметра  $a$  и знака выражения  $D = b^2 - 4ac$  график может принимать различный вид (см. рис. 35).



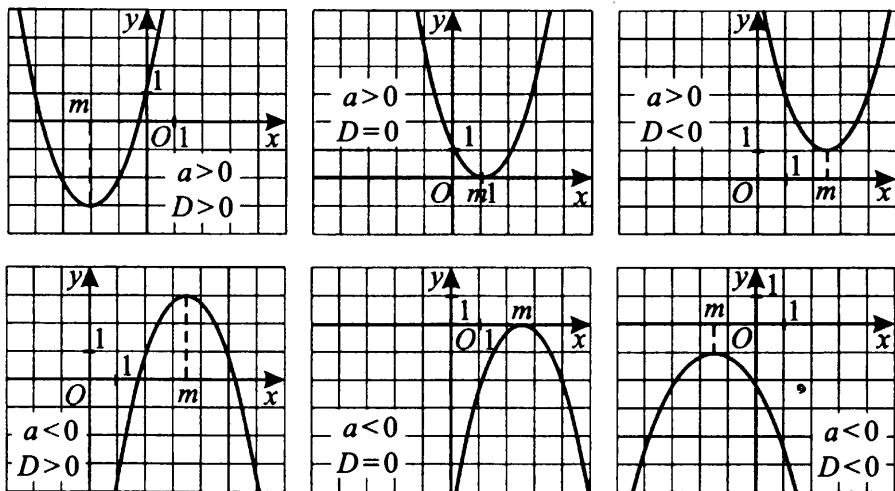


Рис. 35

При  $a > 0$  ветви параболы направлены вверх, при  $a < 0$  — вниз. Знак дискриминанта  $D$  показывает, пересекает ли параболa ось абсцисс. При  $D > 0$  параболa пересекает ось абсцисс дважды, при  $D = 0$  — один раз (вершина параболы лежит на оси абсцисс). При  $D < 0$  параболa не пересекает ось абсцисс.

### Задачи с решениями

2. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 36) и формулами, которые их задают.

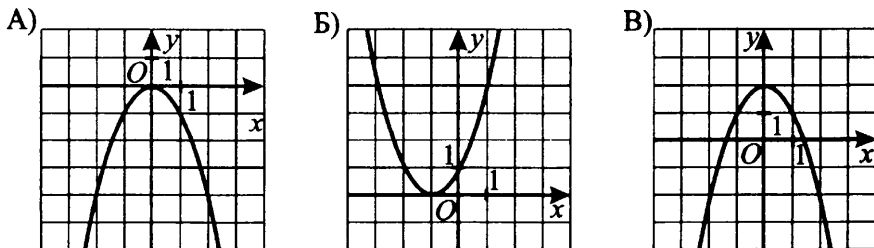


Рис. 36

1)  $y = -x^2 + 2$

2)  $y = (x + 1)^2$

3)  $y = (x - 1)^2$

4)  $y = -x^2$

*Решение.* Все три графика — параболы, то есть заданы формулами вида  $y = ax^2 + bx + c$  или  $y = a(x - m)^2 + n$ .

На графике А ветви параболы направлены вниз, значит, параметр  $a < 0$ . Этому условию отвечают формулы 1 и 4, но так как график А проходит через точку плоскости с координатами  $(0; 0)$ , а график, заданный формулой 1, через неё не проходит (при  $x = 0$   $y = 2 \neq 0$ ), то графику А соответствует формула 4.

На графике Б ветви параболы направлены вверх,  $a > 0$ , и он может быть задан формулой 2 или 3, но так как вершина параболы лежит на оси  $Ox$  в точке с абсциссой  $x = -1$ , то  $y(-1) = 0$ . Формула 3 не подходит, так как для неё  $y(-1) = (-1 - 1)^2 \neq 0$ . Графику Б соответствует формула 2:  $y = (x + 1)^2$ .

На графике В ветви параболы направлены вниз,  $a < 0$ , и ему могут соответствовать формулы 1 и 4. Так как  $y(0) = 2$ , то формула 4 не подходит (в ней  $y(0) = -0^2 = 0$ ), следовательно, график В задаёт формула 1.

Ответ:

А	Б	В
4	2	1

*Замечание.* Для параболы при проверке соответствия графика одной из нескольких формул удобно использовать сравнение координат вершины параболы, изображённой на графике, и координат вершин парабол, задаваемых формулами. Если эти координаты для двух формул совпадают, следует

выбирать ещё одну дополнительную точку графика для проверки.

## Гипербола

### ① Немного полезной информации

График функции, заданной формулой вида  $y = \frac{k}{x}$  или

$y = \frac{k}{x - m} + n$ ,  $k \neq 0$ , — гипербола. Область определения

функции, заданной формулой  $y = \frac{k}{x}$ , — все действительные числа, кроме 0, значит, график этой функции не пересекает ось ординат. Аналогично график, заданный  $y = \frac{k}{x - m} + n$ , не будет проходить ни через одну точку плоскости с абсциссой  $m$  (то есть не пересекает вертикальную прямую  $x = m$ ).

В зависимости от значений, которые принимают параметры  $k$ , гипербола  $y = \frac{k}{x}$  может быть по-разному расположена на декартовой плоскости. При  $k > 0$  гипербола расположена в I и III четвертях, при  $k < 0$  — во II и IV (см. рис. 37).

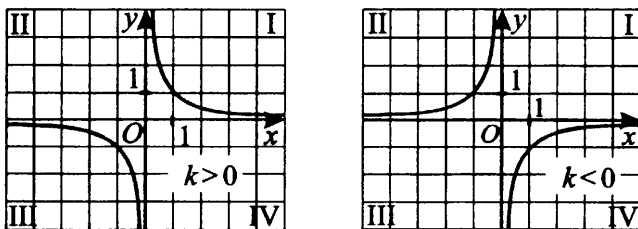


Рис. 37

При наличии параметров  $m$  и  $n$  график гиперболы получается из графика  $y = \frac{k}{x}$  параллельным переносом вправо вдоль оси  $Ox$  на  $m$  и вверх вдоль оси  $Oy$  на  $n$  (см. рис. 38).

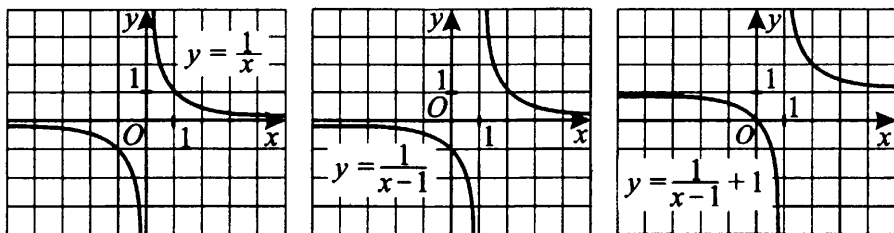


Рис. 38

### 8 — Задачи с решениями

3. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 39) и формулами, которые их задают.

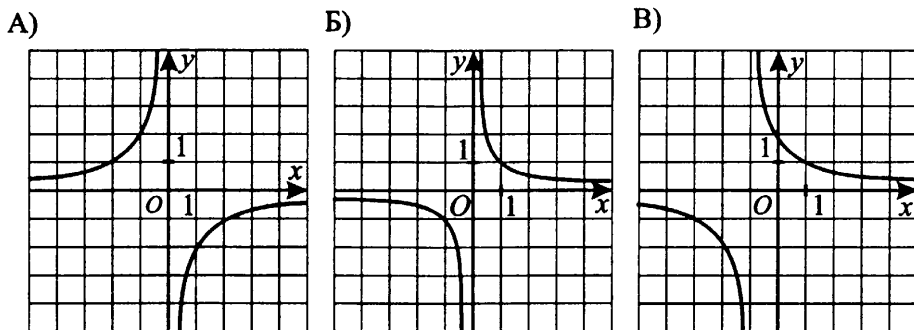


Рис. 39

1)  $y = -\frac{2}{x}$       2)  $y = \frac{2}{x+1}$       3)  $y = \frac{1}{x}$       4)  $y = -\frac{1}{x}$

**Решение.** Все три графика — гиперболы, то есть заданы формулами вида  $y = \frac{k}{x}$  или  $y = \frac{k}{x-m} + n$ .

Для графика А значение параметра  $k < 0$ , значит, он может быть задан формулами 1 или 4. Проверим точку  $(1; -2)$ , через которую проходит этот график. Формула номер 1:  $y(1) = -\frac{2}{1} = -2$  — подходит. Формула номер 4:

$y(1) = -\frac{1}{1} = -1 \neq -2$  — не подходит. Следовательно, из предложенных формул графику А соответствует формула 1.

Для графика Б выполняется  $k > 0$ , значит, он может быть задан формулами 2 или 3. Проверим точку  $(-1; -1)$ , через которую проходит этот график (точку  $(1; 1)$  брать нецелесообразно, так как график В также проходит через неё). Формула 2:  $y(-1) = \frac{2}{-1+1}$  — не определено, поэтому не подходит.

Формула 3:  $y(-1) = \frac{1}{-1} = -1$  — подходит. Следовательно, из предложенных формул графику Б соответствует формула 3.

Для графика В выполняется  $k > 0$ , значит, он может быть задан формулами 2 или 3. Так как из них неиспользованной осталась только формула 2, то она и задаёт этот график.

Ответ:

А	Б	В
1	3	2

**График функции корня**

### ① Немного полезной информации

Рассмотрим графики функций квадратного и кубического корней. Областью определения функции, заданной формулой

$y = \sqrt{x}$ , является  $x \geq 0$ . Областью определения функции, заданной формулой  $y = \sqrt[3]{x}$ , являются все действительные числа (см. рис. 40).

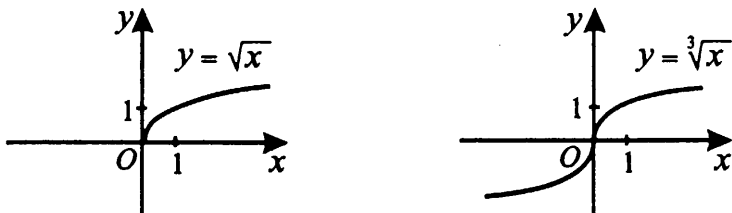


Рис. 40

График функции, заданной формулой вида  $y = \sqrt{x-p} + q$ , получается из графика, заданного формулой  $y = \sqrt{x}$ , параллельным переносом вправо вдоль оси  $Ox$  на  $p$  и вверх вдоль оси  $Oy$  на  $q$ . Например, график функции  $y = \sqrt{x-2} + 1$  получается из графика  $y = \sqrt{x}$  параллельным переносом вправо на 2 деления и вверх на 1 (см. рис. 41).

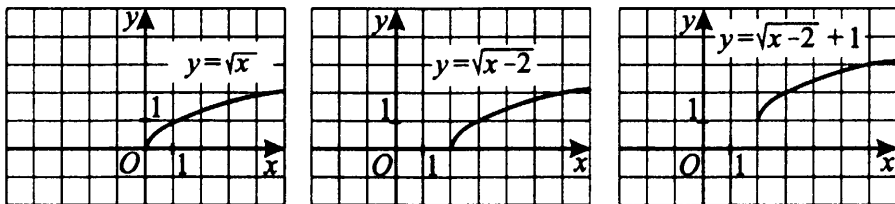


Рис. 41

### Задачи с решениями

4. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 42) и формулами, которые их задают.

- |                     |                       |
|---------------------|-----------------------|
| 1) $y = \sqrt{x}$   | 2) $y = \sqrt{x} - 3$ |
| 3) $y = \sqrt{x+3}$ | 4) $y = \sqrt{x+1}$   |

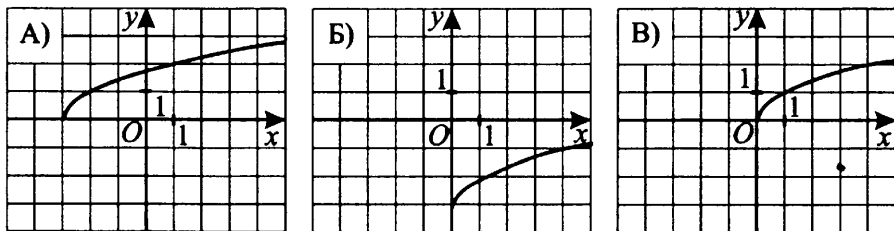


Рис. 42

*Решение.* Заметим, что графики А – В представляют собой смещённые графики функции  $y = \sqrt{x}$ , а потому задаются формулами вида  $y = \sqrt{x - p} + q$ .

График А проходит через  $(-3; 0)$  и задаётся формулой  $y = \sqrt{x + 3}$ , так как из предложенных только она удовлетворяет соотношению  $y(-3) = 0$ .

График Б проходит через  $(0; -3)$  и задаётся формулой  $y = \sqrt{x} - 3$ , так как из предложенных только она удовлетворяет соотношению  $y(0) = -3$ .

График В проходит через  $(0; 0)$  и задаётся формулой  $y = \sqrt{x}$ , так как из предложенных только она удовлетворяет соотношению  $y(0) = 0$ .

Ответ:

А	Б	В
3	2	1

*Замечание.* Вообще-то говоря, подстановка координат одной точки в формулы может оказаться недостаточной (несколько формул превратятся в верные равенства). Тогда надо подставить координаты ещё одной точки.

Рассмотрим теперь задания, содержащие графики разных видов.

### 8 — Задачи с решениями

5. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 43) и формулами, которые их задают.

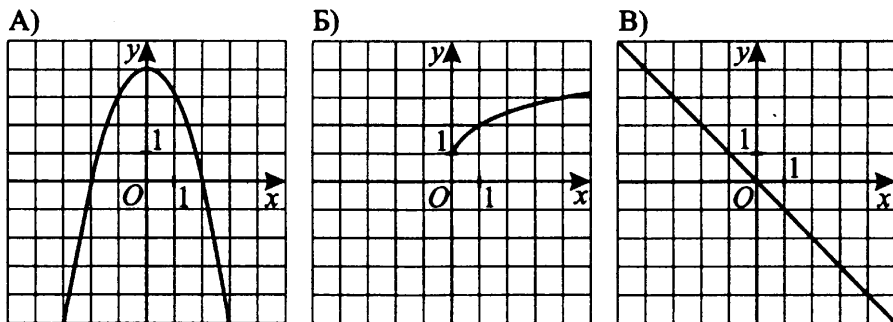


Рис. 43

1)  $y = -x^2 + 4$

2)  $y = -x^2 + 1$

3)  $y = \sqrt{x} + 1$

4)  $y = -x$

*Решение.*

График А — парабола, ветви которой направлены вниз. Из предложенных формул только 1 и 2 задают такую параболу. Вершина параболы, заданной формулой 1, лежит в точке с координатами (0; 4), вершина параболы, заданной формулой 2, — в точке с координатами (0; 1). Вершина параболы А лежит в точке (0; 4), значит, график А задаётся формулой 1.

График Б — смещённый график квадратного корня. Из предложенных вариантов ему может соответствовать только формула 3.

График В — прямая. Из предложенных ему соответствует формула 4.

Ответ:

А	Б	В
1	3	4



6. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 44) и формулами, которые их задают.

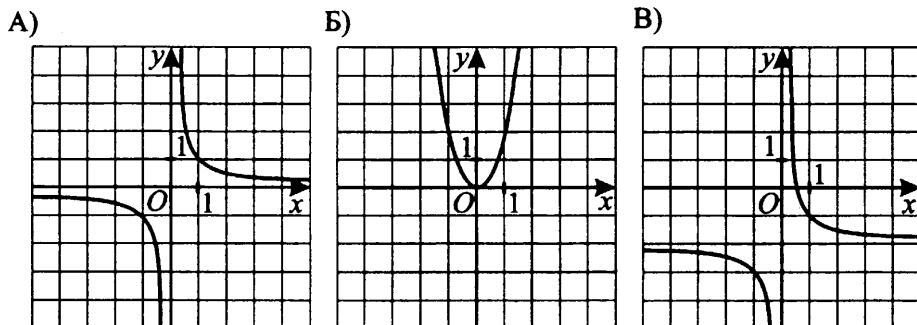


Рис. 44

1)  $y = \frac{1}{x} - 2$       2)  $y = x^2$       3)  $y = \frac{1}{x}$       4)  $y = 2x^2$

*Решение.* График А — гипербола, задаваемая формулой вида  $y = \frac{k}{x}$ ,  $k > 0$ . Значит, А соответствует формула 3.

График Б — парабола, ветви которой направлены вверх. Такую параболу задают формулы 2 или 4. Координаты вершины параболы Б (0; 0) и координаты вершин парабол, задаваемых формулами, совпадают, поэтому рассмотрим дополнительно точку графика Б с координатами (1; 2) и подставим значения её координат в формулы. Для формулы 2 при  $x = 1$   $y = 1 \neq 2$ , следовательно, график Б задаётся формулой 4.

График В — гипербола. Из оставшихся формул подходит только формула 1.

Ответ:

А	Б	В
3	4	1

## Пересечение графиков

### ① Немного полезной информации

Для того чтобы решить задания, в которых требуется найти координаты точки пересечения графиков (заданных уравнениями), удовлетворяющей определённому условию, нужно

- составить и решить систему уравнений, задающих графики, тем самым найдя все их точки пересечения;
- определить условия, отличающие искомую точку от других (например, знак абсциссы), выбрать среди всех найденных точек пересечения искомую.

### 8 — Задачи с решениями

7. На рисунке 45 изображены графики функций  $y = x^2 - 3$  и  $y = x - 1$ . Вычислите координаты точки  $B$ .

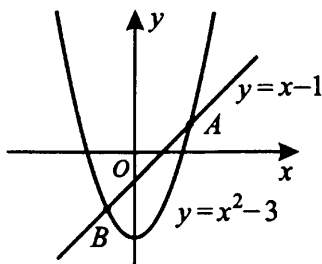


Рис. 45

*Решение.*

Решим систему уравнений 
$$\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = x - 1. \end{cases}$$

$$x^2 - 3 = x - 1; x^2 - x - 2 = 0; x_1 = 2, x_2 = -1; y_1 = 1, y_2 = -2.$$

Таким образом, решениями системы являются точки  $(2; 1)$  и  $(-1; -2)$ .

Точка  $B$  расположена слева от оси  $Oy$ , точка  $A$  — справа, следовательно, абсцисса точки  $B$  — отрицательное число, в то время как абсцисса точки  $A$  — положительное.

Среди найденных точек пересечения выбираем точку с отрицательной абсциссой:  $(-1; -2)$ .

*Ответ:*  $(-1; -2)$ .

8. На рисунке 46 изображены графики функций  $y = 2x + 5$  и  $y = 4 - (x + 2)^2$ . Вычислите координаты точки  $A$ .

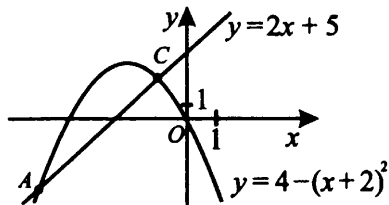


Рис. 46

*Решение.*

а) Решим систему уравнений 
$$\begin{cases} y = 2x + 5, \\ y = 4 - (x + 2)^2. \end{cases}$$

$$2x + 5 = 4 - (x + 2)^2; 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 0; x^2 + 6x + 5 = 0; \\ x_1 = -5, x_2 = -1; y_1 = -5, y_2 = 3.$$

Таким образом, решениями системы являются точки  $(-5; -5)$  и  $(-1; 3)$ .

б) Точка  $A$  расположена ниже оси  $Ox$ , точка  $C$  — выше, следовательно, ордината точки  $A$  — отрицательное число, ордината точки  $C$  — положительное.

в) Среди найденных точек пересечения выбираем точку с отрицательной ординатой:  $(-5; -5)$ .

*Ответ:*  $(-5; -5)$ .

*Замечание.* Можно было бы рассуждать иначе: точка  $A$  левее точки  $C$ , поэтому абсцисса точки  $A$  меньше абсциссы точки  $C$ . Из точек  $(-5; -5)$  и  $(-1; 3)$  абсцисса точки  $(-5; -5)$  меньше, поэтому точка  $(-5; -5)$  является искомой.

## ❓ Варианты для самостоятельного решения

### Вариант 1

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 47) и формулами, которые их задают.

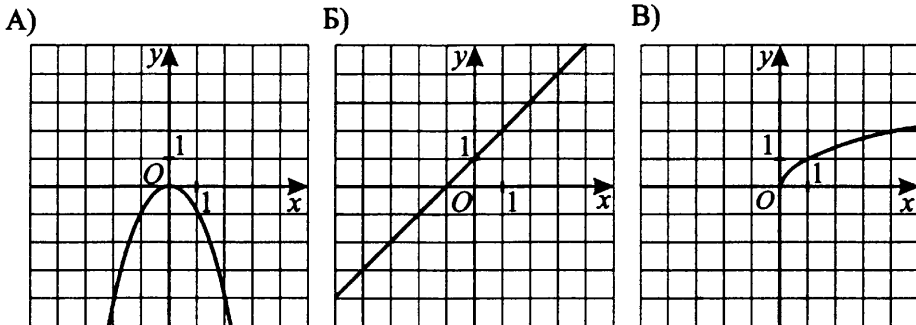


Рис. 47

- 1)  $y = x + 1$     2)  $y = x - 1$     3)  $y = \sqrt{x}$     4)  $y = -x^2$

Ответ:

А	Б	В

2. На рисунке 48 изображены графики функций  $y = -x - 3$  и  $y = -x^2 + 3$ . Вычислите координаты точки А.

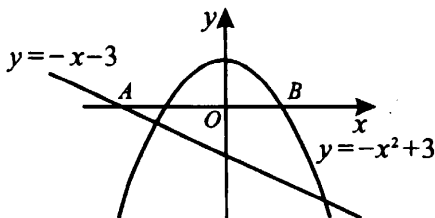


Рис. 48

3. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 49) и формулами, которые их задают.

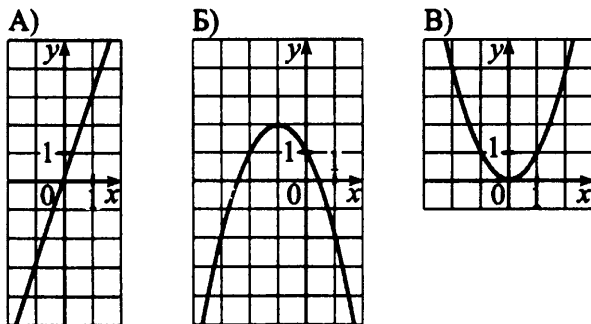


Рис. 49

- 1)  $y = \frac{2}{x}$     2)  $y = x^2$     3)  $y = -(x + 1)^2 + 2$     4)  $y = 3x$

Ответ:

A	Б	В

4. Используя рисунок 50, решите систему уравнений

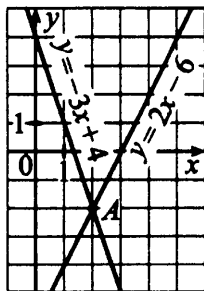
$$\begin{cases} y = -3x + 4, \\ y = 2x - 6. \end{cases}$$


Рис. 50

## Вариант 2

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 51) и формулами, которые их задают.

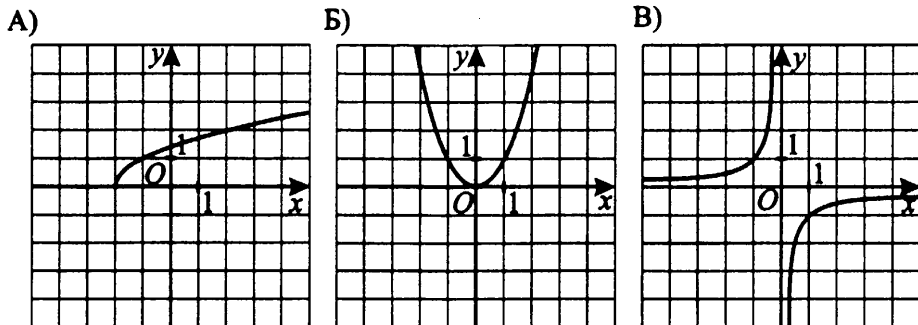


Рис. 51

1)  $y = -\frac{1}{x}$     2)  $y = \sqrt{x+2}$     3)  $y = \frac{1}{x}$     4)  $y = x^2$

Ответ:

	А	Б	В

2. На рисунке 52 изображены графики функций  $y = \frac{1}{2}x + 2$  и

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ . Вычислите координаты точки В.

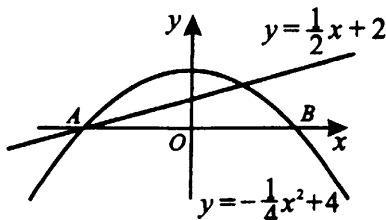


Рис. 52

3. Какой формулой задаётся функция, график которой изображён на рисунке 53?

- 1)  $y = -(x + 1)^2 + 1$     3)  $y = 2(x - 1)^2 + 1$   
 2)  $y = (x - 1)^2 + 1$     4)  $y = -2(x + 1)^2 + 1$

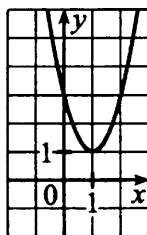


Рис. 53

4. На рисунке 54 изображены графики функций  $y = \frac{1}{x}$  и  $y = 4x$ . Вычислите координаты точки B.

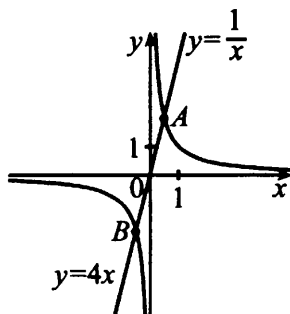
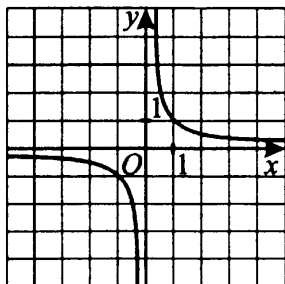


Рис. 54

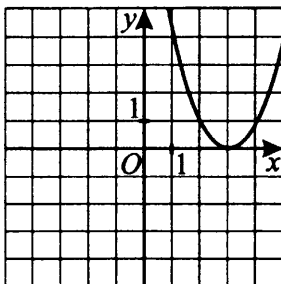
### Вариант 3

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 55) и формулами, которые их задают.

А)



Б)



В)

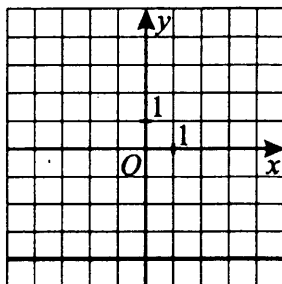


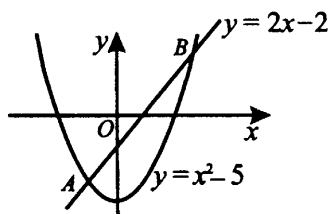
Рис. 55

1)  $y = (x - 3)^2$     2)  $y = x^2 + 3$     3)  $y = \frac{1}{x}$     4)  $y = -4$

Ответ:

А	Б	В

2. На рисунке 56 изображены графики функций  $y = x^2 - 5$  и  $y = 2x - 2$ . Вычислите координаты точки А.



Ответ: \_\_\_\_\_

Рис. 56

3. Какой из графиков является графиком функции  $y = \frac{2}{x-1} + 3$  (см. рис. 57)?

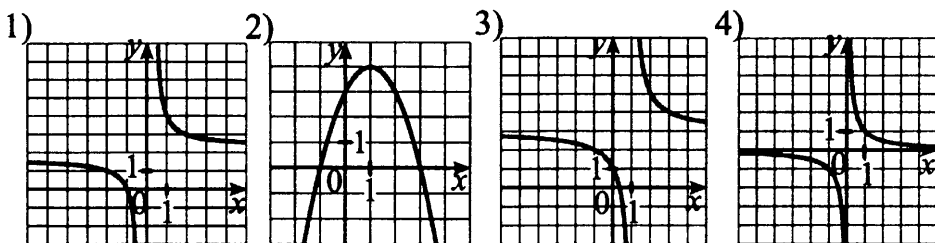


Рис. 57

4. На рисунке 58 изображены графики функций  $y = \frac{3}{x}$  и  $y = \frac{2}{x-1}$ . Найдите координаты точки А.



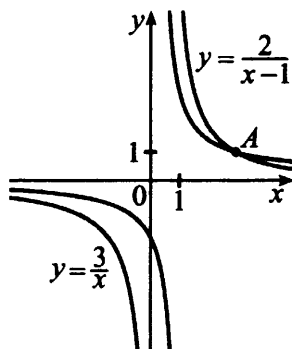


Рис. 58

## Вариант 4

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 59) и формулами, которые их задают.

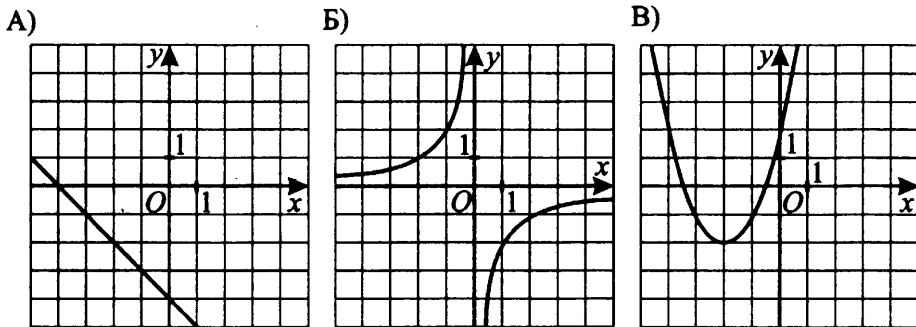


Рис. 59

1)  $y = -\frac{1}{x}$

2)  $y = (x + 2)^2 - 2$

3)  $y = -\frac{2}{x}$

4)  $y = -x - 4$

Ответ:

A	Б	В

2. На рисунке 60 изображены графики функций  $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$  и  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ . Вычислите координаты точки  $B$ .

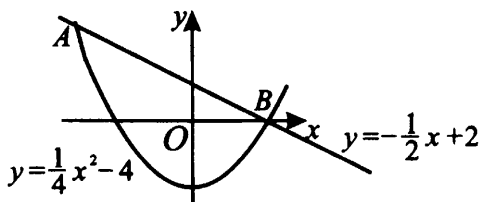


Рис. 60

Ответ: \_\_\_\_\_

3. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 61) и формулами, которые их задают.

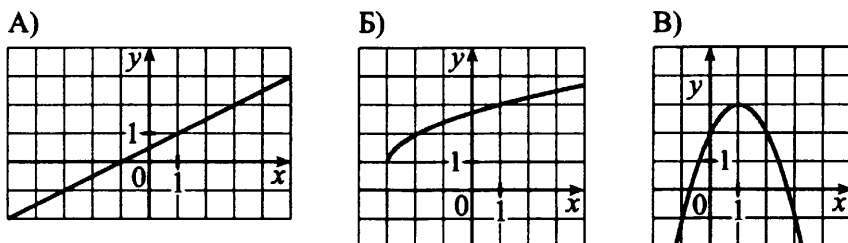


Рис. 61

- 1)  $y = \sqrt{x+3} + 1$                       2)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$   
 3)  $y = -x^2 + 2x + 2$                       4)  $y = (x-1)^2 + 2$

Ответ:

A	Б	В

4. На рисунке 62 изображены графики функций  $y = 2x + 1$ ,  $y = 4 - x$ ,  $y = \frac{3}{2}x$ . Вычислите координаты точки  $C$ .

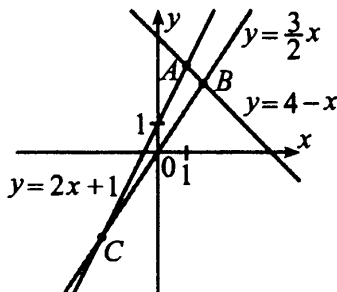


Рис. 62

### Вариант 5

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 63) и формулами, которые их задают.

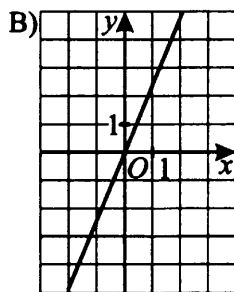
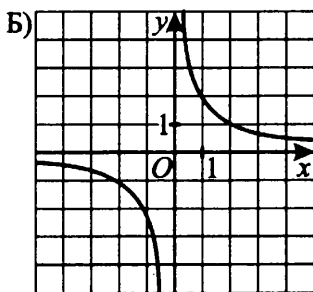
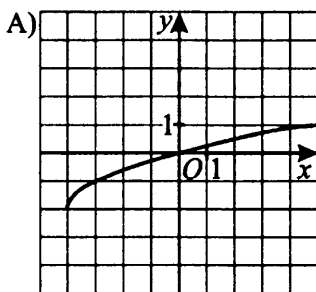


Рис. 63

1)  $y = \frac{5}{2}x$

2)  $y = \frac{2}{x}$

3)  $y = \sqrt{x+4} - 2$

4)  $y = \sqrt{x+2} - 4$

Ответ:

А	Б	В

2. На рисунке 64 изображены графики функций  $y = 3x + 3$  и  $y = x^2 + 4x - 3$ . Вычислите координаты точки  $B$ .

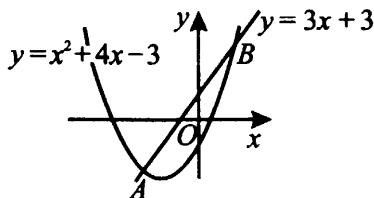


Рис. 64

3. Какой формулой задаётся функция, график которой изображён на рисунке 65?

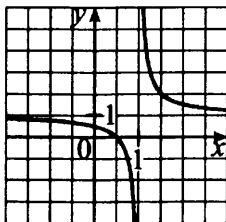


Рис. 65

1)  $y = \frac{2}{x-3} + 1$

2)  $y = \frac{1}{x-2} + 1$

3)  $y = \frac{2}{x-1} + 1$

4)  $y = \frac{2}{x-2} + 2$

4. На рисунке 66 изображены графики функций  $y = x^2 + 5x + 1$  и  $y = -x^2 - 3x - 5$ . Вычислите координаты точки  $B$ .

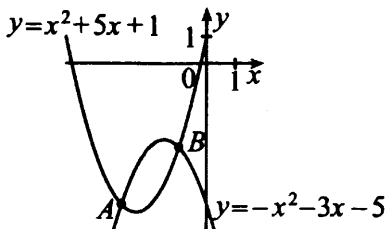


Рис. 66

## Вариант 6

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 67) и формулами, которые их задают.

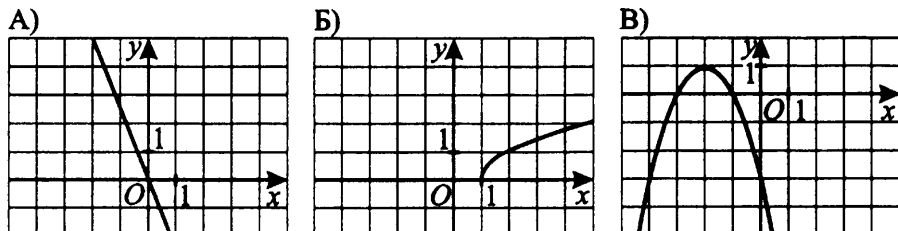


Рис. 67

1)  $y = \sqrt{x-1}$

2)  $y = -(x+2)^2 + 1$

3)  $y = -\frac{5}{3}x$

4)  $y = -\frac{5}{2}x$

Ответ:

A	Б	В)

2. На рисунке 68 изображены графики функций  $y = 4x - 13$  и  $y = -4(x-4)^2 + 11$ . Вычислите координаты точки А.

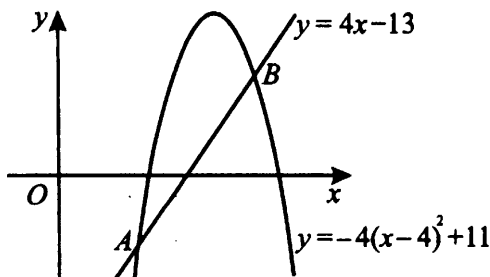


Рис. 68

3. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 69) и формулами, которые их задают.

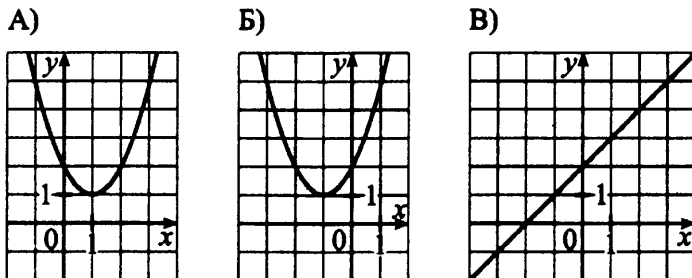


Рис. 69

1)  $y = (x - 1)^2 + 1$

2)  $y = x + 1$

3)  $y = (x + 1)^2 + 1$

4)  $y = x + 2$

Ответ:

A	Б	В

4. На рисунке 70 изображены графики функций  $y = x^2 - 3$  и  $y = x + 3$ . Вычислите координаты точки А.

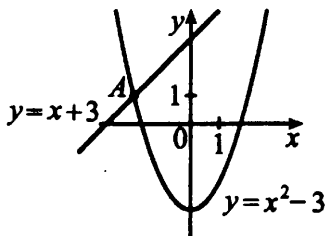


Рис. 70

# Тренировочные тесты к модулю 1 «Алгебра»

## Вариант 1

1. Найдите значение выражения  $\frac{1,2 \cdot 2,8}{4,8}$ .

1) 7

2) 0,7

3) 0,4

4) 4

2. Найдите область допустимых значений переменной  $x$  в выражении  $\frac{1}{\sqrt{x+7}}$ .

1)  $x > 7$

2)  $x \geq 7$

3)  $x > -7$

4)  $x \geq -7$

3. Найдите два последовательных целых числа, между которыми заключено число  $\sqrt{37}$ .

4. Найдите корень уравнения  $2(3 - 2x) = x - 4$ .

5. Упростите выражение  $\frac{x}{y} + \frac{y^2 - x^2}{xy}$  и найдите его значение

при  $x = 200\sqrt{7}$ ,  $y = 300\sqrt{7}$ .

6. Решите неравенство  $(x - 7)(x + 7) < -40$ , в ответе укажите наименьшее целое решение этого неравенства.

7. Дана арифметическая прогрессия 5, 8, 11, ... . Найдите сумму первых шести её членов.

8. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 71).

1)  $y = \frac{4}{x}$

2)  $y = -\frac{2}{x}$

3)  $y = 2$

4)  $y = 2x$

Ответ:

А	Б	В

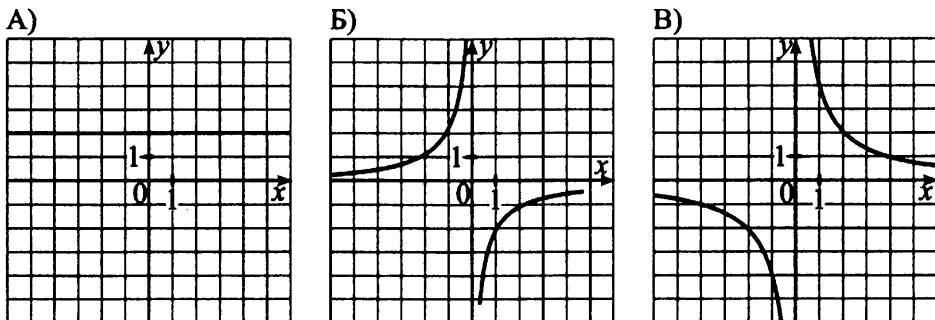


Рис. 71

9. На рисунке 72 изображены графики функций  $y = x^2 - 4$  и  $y = 2x + 4$ . Найдите координаты точки  $B$ .

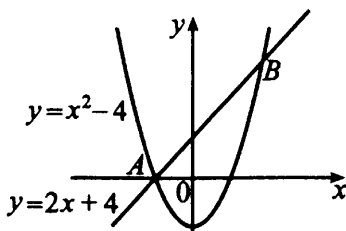


Рис. 72

10. На координатной прямой отмечены числа  $a$  и  $b$  (см. рис. 73). Какое из утверждений относительно этих чисел является верным?

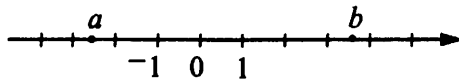


Рис. 73

1)  $b + a < 0$

3)  $5 - a > b$

2)  $b + 8a > 0$

4)  $2a - b > 0$



## Вариант 2

1. Найдите значение выражения  $\frac{20,4 \cdot 3,5}{10,5}$ .

1) 4,08

2) 0,68

3) 68

4) 6,8

2. Найдите область допустимых значений переменной  $a$  в выражении  $\frac{1}{\sqrt{9-a}}$ .

1)  $a > 9$ 2)  $a < 9$ 3)  $a \geq 9$ 4)  $a \leq 9$ 

3. Найдите два последовательных целых числа, между которыми заключено число  $\sqrt{29}$ .

4. Найдите сумму корней уравнения  $3x^2 - 18x = 0$ .

5. Упростите выражение  $\frac{(a+2b)^2}{ab} - 4 \cdot \frac{a+b}{a}$  и найдите его

значение при  $a = 150\sqrt{11}$ ,  $b = 200\sqrt{11}$ .

6. Решите неравенство  $8x + 12 > 2(11 - x)$ .

7. Найдите четвёртый член последовательности  $a_n$ , если  $a_1 = -3$  и  $a_{n+1} = a_n + 2$ .

8. Какой из графиков на рисунке 74 соответствует формуле

$$y = \frac{2}{x-1}?$$

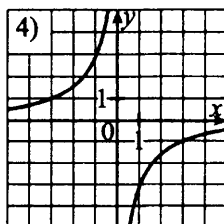
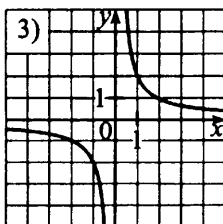
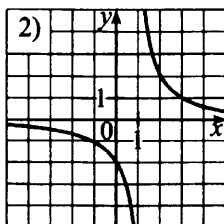
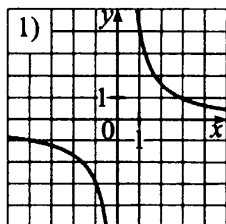


Рис. 74

9. На рисунке 75 изображены графики функций  $y = x - 1$ ,  $y = 4 - x$ ,  $y = 2x + 1$ . Найдите координаты точки А.

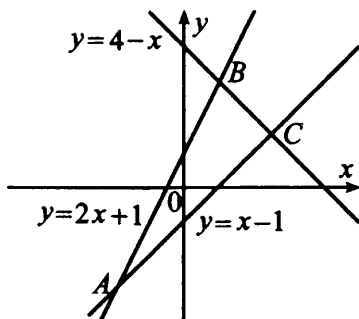


Рис. 75

10. На координатной прямой отмечены точки  $M, N, K, L$  (см. рис. 76). Одна из них соответствует числу  $\sqrt{612}$ . Какая это точка?

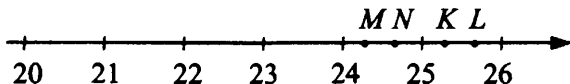


Рис. 76

1)  $M$

2)  $N$

3)  $K$

4)  $L$

**Вариант 3**

1. Установите соответствие между выражениями и их значениями.

А)  $\frac{7}{8} \cdot 1\frac{1}{7}$

Б)  $-\frac{4}{5} - \frac{5}{4}$

В)  $\frac{2}{5} : \frac{5}{2}$

1) 1

2) 0,16

3) 2,05

4) -2,05

Ответ:

А	Б	В

2. Укажите выражение, тождественно равное выражению  $(a - 5)(15 - b)$ .

1)  $(b - 15)(5 - a)$

2)  $(a - 5)(b - 15)$

3)  $-(15 - b)(a - 5)$

4)  $-(a - 15)(5 - b)$

3. Внесите множитель под знак корня  $(-7\sqrt{5})$ .

4. Найдите корни уравнения  $(x + 6)\sqrt{x + 5} = 0$ .

5. Упростите выражение  $\frac{b^2 - c^2}{c - b} + 2b$  и найдите его значение

при  $b = 35 + \sqrt{15}$ ,  $c = 27 + \sqrt{15}$ .

6. Найдите количество целых решений неравенства

$$x^2 - 15x + 50 \leq 0.$$

7. Дана арифметическая прогрессия, в которой  $a_6 = 15$ ,  $a_7 = 21$ . Найдите разность арифметической прогрессии.

8. Укажите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 77).

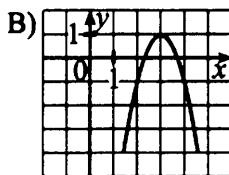
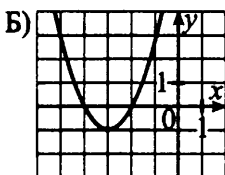
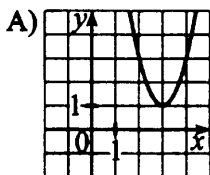


Рис. 77

1)  $y = (x + 3)^2 - 1$

2)  $y = 2x^2 - 12x + 19$

3)  $y = \frac{2}{x}$

4)  $y = -2(x - 3)^2 + 1$

Ответ:

А	Б	В

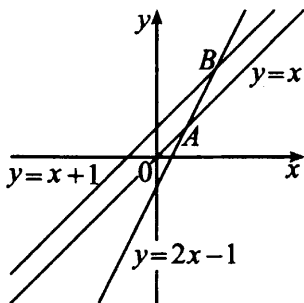


Рис. 78

9. На рисунке 78 изображены графики функций  $y = x + 1$ ,  $y = x$  и  $y = 2x - 1$ . Найдите координаты точки  $B$ .

10. На координатной прямой отмечены числа  $a$  и  $b$  (см. рис. 79). Какое из чисел наибольшее?

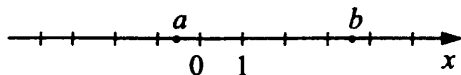


Рис. 79

1)  $b + a$

2)  $b - a$

3)  $b + 2$

4)  $3a$

**Вариант 4**

1. Установите соответствие между выражениями и их значениями.

А)  $\frac{11}{12} \cdot 1\frac{1}{11}$

Б)  $-\frac{5}{12} + \frac{1}{6}$

В)  $0,2 : 0,04$

1) 1

2) 5

3)  $-0,25$

4)  $0,5$

Ответ:

А	Б	В

2. Укажите выражение, тождественно равное выражению  $(7 - x)(8 - y)$ .

1)  $-(x - 7)(y - 8)$

2)  $-(7 - y)(8 - x)$

3)  $-(y - 8)(7 - x)$

4)  $-(x + 7)(8 - y)$

3. Внесите множитель под знак корня  $(-5\sqrt{7})$ .

4. Решите уравнение  $\frac{2x + 7}{3} = \frac{x + 7}{5}$ .

5. Упростите выражение  $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{1}{(a + b)^2 - 2ab}$  и найдите

его значение при  $a = \frac{\sqrt{2}}{6}$ ,  $b = \frac{\sqrt{8}}{5}$ .

6. Найдите длину промежутка решений неравенства  $(2 - x)(x + 3) \geq 0$ .

7. Найдите первый член арифметической прогрессии, если  $a_8 = 14$ , разность  $d = 7$ .

8. Какая из формул соответствует графику, представленному на рисунке 80?

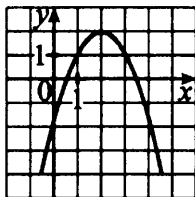


Рис. 80

1)  $y = (x - 2)^2 + 2$

2)  $y = \frac{4}{x}$

3)  $y = -x^2 + 4x - 2$

4)  $y = -x^2 + 2x + 2$

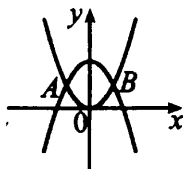


Рис. 81

9. На рисунке 81 изображены графики функций  $y = x^2$  и  $y = -x^2 + 2$ . Найдите координаты точки A.

10. Решите систему неравенств  $\begin{cases} 3x - 2 \geq 0, \\ 2x - 10 < 0. \end{cases}$  На какой из координатных прямых изображено множество решений системы (см. рис. 82)?

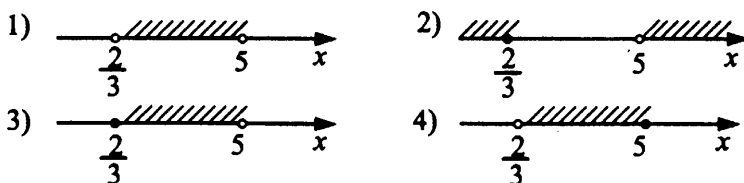


Рис. 82

### Вариант 5

1. Относительная высота горы Арарат (расстояние от подножия до вершины) составляет 4 км 365 м. Переведите эту величину в метры.

1) 4,365 м

2)  $4,365 \cdot 10^3$  м

3)  $40,365 \cdot 10^3$  м

4) 400,365 м

2. Сократите дробь  $\frac{(a^2)^3 \cdot b^6}{b^2}$ .

1)  $a^5b^3$

2)  $a^6b^3$

3)  $a^5b^4$

4)  $a^6b^4$

3. На координатной прямой отмечены точки  $A, B, C, D$  (см. рис. 83). Одна из них соответствует числу  $\sqrt{115}$ . Какая это точка?

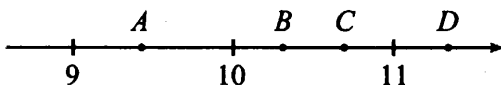


Рис. 83

- 1)  $A$                       2)  $B$                       3)  $C$                       4)  $D$

4. Решите уравнение  $x^2 - 2x - 3 = 0$ . В ответе укажите его наибольший корень.

5. Упростите выражение  $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{xy}{x-y}$  и найдите его значение при  $x = 3 - \sqrt{7}$ ,  $y = 7 + \sqrt{7}$ .

6. Решите неравенство  $11 + 7(3 - x) \leq -3(4 + x)$ , в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.

7. Задана арифметическая прогрессия  $39, 3x, 69, \dots$ . Найдите  $x$ .

8. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 84).

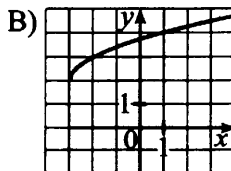
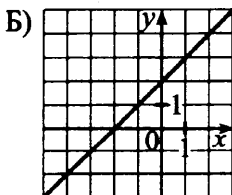
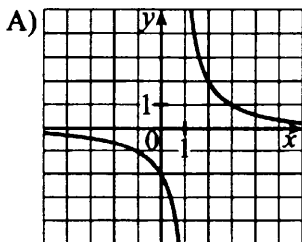


Рис. 84

1)  $y = x + 2$

2)  $y = \sqrt{x + 3} + 2$

3)  $y = \sqrt{x - 3} + 2$

4)  $y = \frac{2}{x - 1}$

Ответ:

А	Б	В

9. На рисунке 85 изображены графики функций  $y = 2x$  и  $y = \frac{8}{x}$ . Найдите координаты точки А.

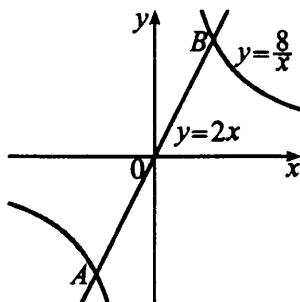


Рис. 85

10. Решите систему неравенств  $\begin{cases} 3x + 7 \leq 0, \\ 2x + 8 < 0. \end{cases}$  На какой из координатных прямых изображено множество решений системы (см. рис. 86)?

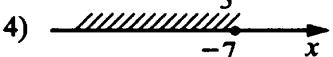
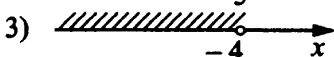
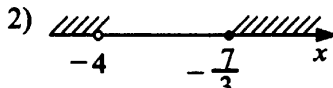
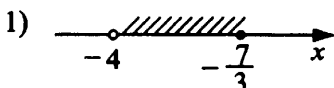


Рис. 86



## Вариант 6

1. В таблице приведены объёмы воды в четырёх прудах.

Пруд	1	2	3	4
Объём (л)	$8,7 \cdot 10^7$	$1,2 \cdot 10^8$	$3,6 \cdot 10^9$	$2,3 \cdot 10^8$

В каком из них количество воды наименьшее?

- 1) 1                      2) 2                      3) 3                      4) 4

2. Сократите дробь  $\frac{x^{10} \cdot (y^2)^4}{x^2}$ .

- 1)  $x^5y^6$               2)  $x^8y^8$               3)  $x^5y^8$               4)  $x^8y^6$

3. На координатной прямой отмечены точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$ ,  $E$  (см. рис. 87). Одна из них соответствует числу  $\sqrt{610}$ . Какая это точка?

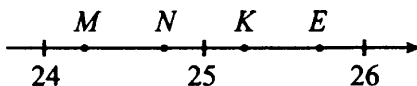


Рис. 87

- 1)  $M$                       2)  $N$                       3)  $K$                       4)  $E$

4. Решите уравнение  $\frac{2x - 5}{2} = \frac{8 - 5x}{4}$ .

5. Упростите выражение  $\left(\frac{a}{b} + a\right) \cdot \frac{ab^2}{ab + a}$  и найдите его значение при  $a = 3\sqrt{3}$ ,  $b = 2\sqrt{12}$ .

6. Решите неравенство  $(x - 7)(x + 6) < 0$ . В ответе укажите наименьшее целое число, являющееся решением неравенства.

7. Дана геометрическая прогрессия 2, -6, 18, ... . Найдите пятый член прогрессии.

8. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 88).

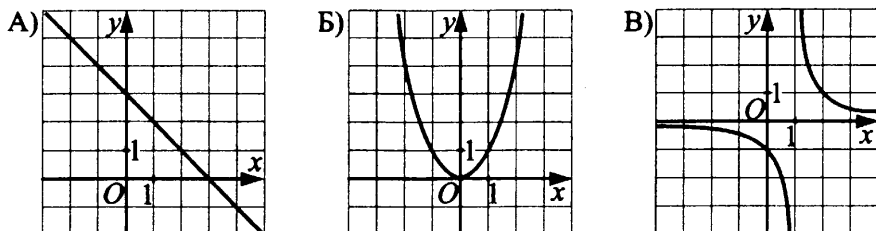


Рис. 88

- 1)  $y = \frac{2}{x}$     2)  $y = -x + 3$     3)  $y = \frac{1}{x - 1}$     4)  $y = x^2$

Ответ:

A	Б	В

9. На рисунке 89 изображены графики функций  $y = x^2 - 9$  и  $y = 3x - 5$ . Вычислите координаты точки А.

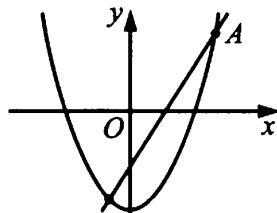


Рис. 89

10. Решению какого из представленных неравенств соответствует рисунок 90?



Рис. 90

- 1)  $(x + 3)(x - 2) > 0$     2)  $(x - 3)(x + 2) \geq 0$   
 3)  $\frac{x - 3}{x + 2} > 0$     4)  $\frac{x + 2}{x - 3} \geq 0$

## Вариант 7

1. Укажите выражение, значение которого является наибольшим.

1)  $\frac{0,4}{0,2} - 2$

2)  $\frac{23,8 - 5}{0,4}$

3)  $\frac{7,7}{0,9} : \frac{1}{27}$

4)  $-0,1 + 5 : \frac{5}{6}$

2. Среди приведённых ниже равенств укажите тождественно верное.

1)  $(a + b^2)^2 = a^2 + b^4$

2)  $c^2 - d^4 = (d^2 + c)(c - d^2)$

3)  $(x^2 - y)^2 = x^4 - 2x^2y - y^2$

4)  $p^4 - q^2 = (p^2 + q)(p - q)$

3. Вычислите  $\sqrt{3\frac{2}{9}} \cdot \sqrt{2\frac{23}{29}}$ .

4. Найдите корень уравнения  $9 - x = 1 + 2(7 - x)$ .

5. Упростите выражение  $\frac{(2x - y)^2}{x} + 4(y - x)$  и найдите его значение при  $x = 4$ ,  $y = 6\sqrt{3}$ .

6. Решите неравенство  $x^2 - 3x + 4 < 0$ . В ответе укажите количество целочисленных решений этого неравенства.

7. В геометрической прогрессии  $b_1 = -16$ , знаменатель  $q = -\frac{1}{2}$ . Найдите четвёртый член этой прогрессии.

8. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см.рис. 91).

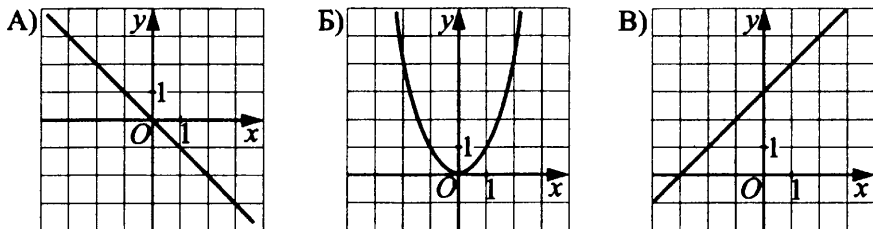


Рис. 91

- 1)  $y = x^2$       2)  $y = -x$       3)  $y = 3x$       4)  $y = x + 3$

Ответ:

A	Б	В

9. На рисунке 92 изображены графики функций  $y = x^2$ ,  $y = -x + 2$ ,  $y = x + 6$ . Вычислите координаты точки А.

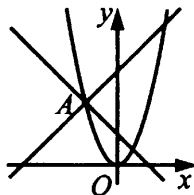


Рис. 92

10. Решите систему неравенств  $\begin{cases} 9x + 27 \geq 0, \\ 2x - 8 < 0. \end{cases}$  На какой из координатных прямых изображено множество решений системы (см. рис. 93)?

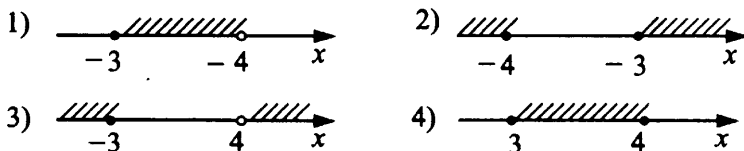


Рис. 93

## Вариант 8

1. Укажите выражение, значение которого является наибольшим.

1)  $-4 + 11 : \frac{11}{17}$

2)  $\frac{12,4 - 11}{0,7}$

3)  $-\frac{8,8}{0,3} : \frac{1}{6}$

4)  $\frac{0,3}{0,2} - 11$

2. Среди приведённых ниже равенств укажите тождественно верное.

1)  $(a^2 + b)^2 = a^4 + b^2$

2)  $c^2 - d^4 = (d^2 + c)(d^2 - c)$

3)  $(x^2 - y)^2 = y^2 - 2yx^2 + x^4$

4)  $p^4 - q^2 = (p^2 - q)^2$

3. Вычислите  $\sqrt{3\frac{5}{9} \cdot 4,5}$ .

4. Найдите сумму корней уравнения  $x^2 - 7x + 8 = 0$ .

5. Упростите выражение  $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} \cdot (y - x)$  и найдите его

значение при  $x = 4 + \sqrt{5}$ ,  $y = 6 - \sqrt{5}$ .

6. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{x - 3}{x + 5} \geq 2.$$

7. Найдите первый член геометрической прогрессии, если  $b_5 = 162$ ,  $q = 3$ .

8. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 94).

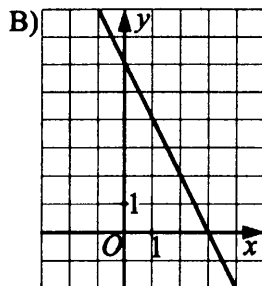
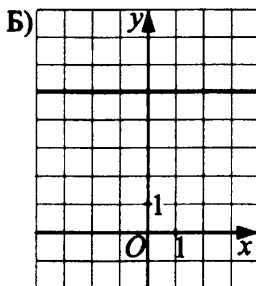
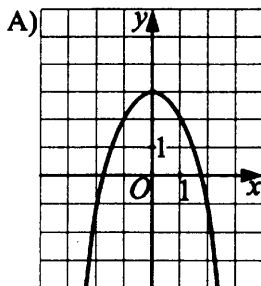


Рис. 94

- 1)  $y = -\frac{5}{x}$     2)  $y = -x^2 + 3$     3)  $y = -2x + 6$     4)  $y = 5$

Ответ:

	А	Б	В

9. На рисунке 95 изображены графики функций  $y = x^2 + 1$ ,  $y = 2x$ ,  $y = -x + 3$ . Вычислите координаты точки А.

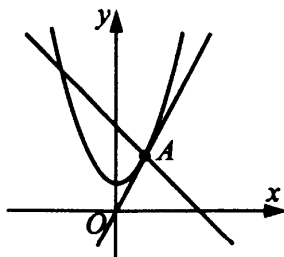


Рис. 95

10. Решению какой из представленных систем неравенств соответствует рисунок 96?

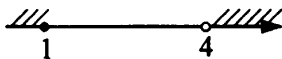


Рис. 96

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\begin{cases} x > 4, \\ x \leq 1. \end{cases}$                          | 3) $\begin{cases} (x-1)(x-4)^2 < 0, \\ (x-4)^2(x-1) > 0. \end{cases}$ |
| 2) $\begin{cases} (x-1)(x-4) \geq 0, \\ \frac{1}{(x-4)^2} > 0. \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} x \leq 4, \\ x > 1. \end{cases}$                    |

### Вариант 9

1. Найдите значение выражения  $\left(4\frac{2}{3} - \frac{3}{7}\right) \cdot 2,625 : 9\frac{8}{9}$ .

1) 11,25

2)  $10\frac{1}{8}$

3)  $\frac{3}{8}$

4) 1,125

2. На координатной прямой отмечено число  $a$  (см. рис. 97).

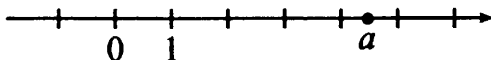


Рис. 97

Какое из утверждений относительно этого числа является верным?

1)  $a - 4 < 0$

2)  $6 - a < 0$

3)  $a - 3 > 0$

4)  $a - 7 > 0$

3. Найдите значение выражения  $\frac{(2\sqrt{10})^2}{25}$ .

4. Решите уравнение  $\frac{2x+7}{3} = 5$ .

5. Упростите выражение  $\frac{(a + 3b)^2 - (3b - a)^2}{a}$  и найдите его

значение при  $a = 14 + \sqrt{3}$ ,  $b = 5$ .

6. Решите неравенство  $x^2 + 3x - 4 < 0$ . В ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.

7. Дана геометрическая прогрессия 5, 15, 45, ... . Найдите сумму первых шести её членов.

8. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см.рис. 98).

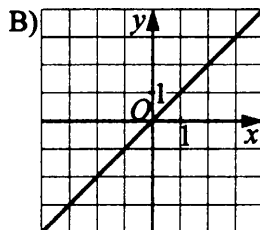
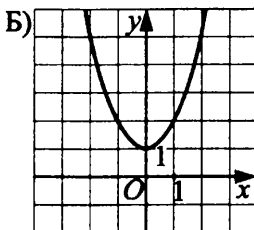
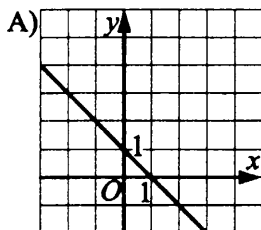


Рис. 98

- 1)  $y = 1 - x$       2)  $y = x^2 + 1$       3)  $y = \frac{2}{x}$       4)  $y = x$

Ответ:

А	Б	В

9. На рисунке 99 изображены графики функций  $y = -3$  и  $y = x^2 - 2x - 3$ . Вычислите координаты точки А.

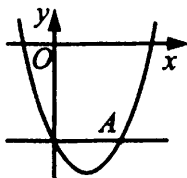


Рис. 99



10. Какое из указанных чисел является рациональным?

1)  $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{8}$

3)  $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} - 1)$

2)  $\frac{\sqrt{44}}{\sqrt{22}}$

4)  $(5 + \sqrt{2})^2$

### Вариант 10

1. Найдите значение выражения  $(3,2 + 8,4) : 1\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{25}$ .

1) 2,9

2) 7,25

3) 0,29

4) 0,7424

2. На координатной прямой отмечено число  $b$  (см. рис. 100).

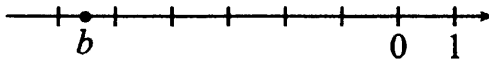


Рис. 100

Какое из утверждений относительно этого числа является верным?

1)  $4 - b > 0$

2)  $b + 5 > 0$

3)  $b + 7 < 0$

4)  $8 - b < 0$

3. Найдите значение выражения  $\frac{42}{(5\sqrt{6})^2}$ .

4. Решите уравнение  $-x^2 - 2x + 3 = 0$ .

5. Упростите выражение  $\frac{1}{c^2 + d^2} \cdot \left(\frac{c+d}{c-d} + \frac{c-d}{c+d}\right)$  и найдите его значение при  $c = \sqrt{17}$ ,  $d = \sqrt{12}$ .

6. Решите неравенство  $2(7 - 5x) > 12(x + 1) - 7$ . В ответе укажите наибольшее целое решение неравенства.

7. В геометрической прогрессии  $b_3 = 3$ ,  $b_5 = \frac{1}{3}$ . Найдите  $b_4$ , если известно, что знаменатель  $q$  положителен.

8. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см.рис. 101).

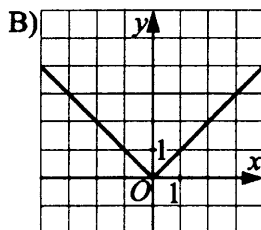
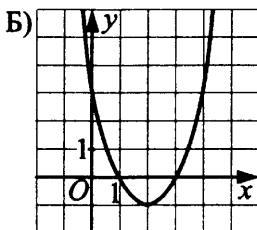
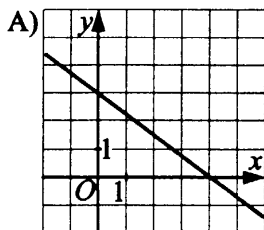


Рис. 101

1)  $y = (x - 3)(x - 1)$

2)  $y = |x|$

3)  $y = -\frac{3}{4}x + 3$

4)  $y = 4x + 3$

Ответ:

А	Б	В

9. На рисунке 102 изображены графики функций  $y = x + 5$  и  $y = (x - 1)^2$ . Вычислите координаты точки А.

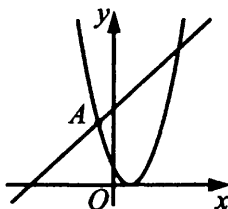


Рис. 102

10. Какое из указанных чисел является рациональным?

1)  $(\sqrt{28} - \sqrt{3})(\sqrt{28} + 3)$

3)  $(\sqrt{32} - 1)^2$

2)  $(\sqrt{49} - \sqrt{16})^2$

4)  $\frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{13}{\sqrt{7}}$

**Модуль 2.**

**Геометрия**

## Глава 6. Базовые понятия и треугольник

### Углы

#### ① Немного полезной информации

Фигура, образованная двумя лучами с общим началом, называется **углом**. Также углом называют и часть плоскости, ограниченную этими лучами.

Общее начало лучей называется **вершиной угла**, а сами лучи — **сторонами угла** (см. рис. 103).

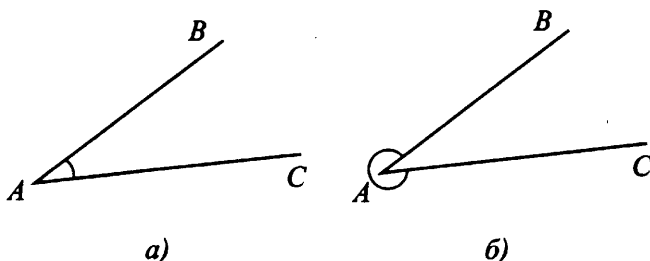


Рис. 103

Изображённые на рисунке 103 углы обозначаются  $\angle BAC$  (или  $\angle CAB$ , или просто  $\angle A$ ). Но обычно в геометрии рассматриваются «меньшие» углы (см. рис. 103 а), мы тоже будем следовать этому обозначению.

Угол называется **развёрнутым**, если его стороны вместе образуют прямую (см. рис. 104). Величина развёрнутого угла равна  $180^\circ$ .



Рис. 104

Два угла называются **смежными**, если одна сторона у них общая, а две другие составляют вместе прямую. Например, на рисунке 105  $\angle AOB$  и  $\angle BOC$  смежные. Сумма смежных углов равна  $180^\circ$  ( $\angle COB + \angle BOA = 180^\circ$ ).

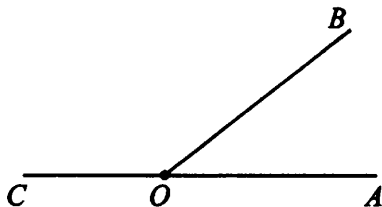


Рис. 105

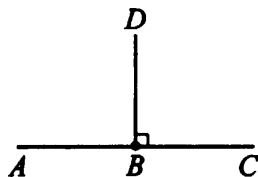


Рис. 106

Угол, равный своему смежному, называется **прямым**. Например, на рисунке 106  $\angle ABD$  и  $\angle DBC$  прямые. Прямой угол равен  $90^\circ$ .  $DB$  — перпендикуляр к прямой  $AC$ .

Если мы из одной точки опустим перпендикуляр и наклонную к заданной прямой, то длина перпендикуляра будет меньше.

**Биссектриса** — это луч, исходящий из вершины угла и делящий его пополам. На рисунке 107  $BD$  — биссектриса угла  $ABC$  ( $\angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC$ ).

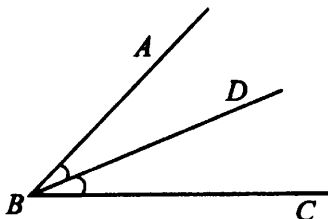


Рис. 107

Если угол меньше  $90^\circ$ , он называется **острым**, если больше  $90^\circ$ , но меньше  $180^\circ$  — **тупым**.

Две прямые при пересечении образуют 4 угла (см. рис. 108).

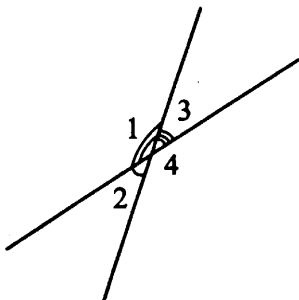


Рис. 108

Прямые, пересекающиеся под прямым углом, называются **перпендикулярными** (если прямые  $a$  и  $b$  перпендикулярны, пишут  $a \perp b$ ).

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны. Например, на рисунке 109  $\angle AOB = \angle COD$ ,  $\angle AOC = \angle BOD$ .

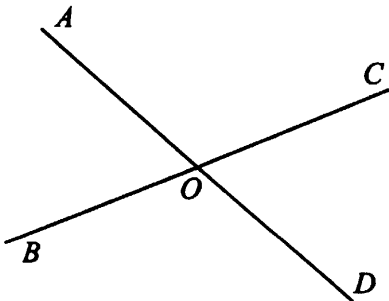


Рис. 109

В качестве угла между прямыми берётся тот угол, который не является тупым.

### 8 — Задачи с решениями

11. Найдите градусную меру угла  $\angle COB$ , если  $\angle AOC = 150^\circ$  (см. рис. 110).

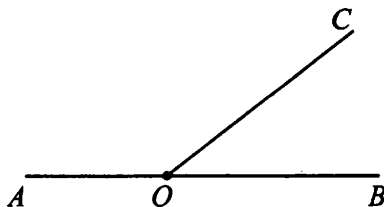


Рис. 110

*Решение.*

$\angle AOC$  и  $\angle COB$  смежные, значит,  
 $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$ ,  $\angle COB = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ .

*Ответ:* 30.

### ① Немного полезной информации

Прямые, которые не пересекаются, называются **параллельными**.

Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны. На рисунке 111 имеем  $a \perp c$  и  $b \perp c$ , а значит,  $a \parallel b$ .

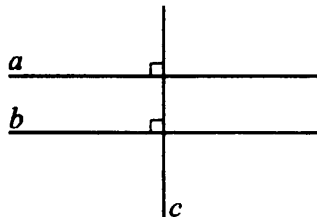


Рис. 111

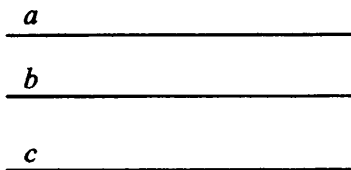


Рис. 112

Две прямые, параллельные третьей, также параллельны. Например, если  $a \parallel b$  и  $b \parallel c$ , то  $a \parallel c$  (см. рис. 112).

Если точка  $A$  не лежит на прямой  $a$ , то можно провести ровно одну прямую  $b$ , проходящую через точку  $A$  и параллельную прямой  $a$ .

Рассмотрим две прямые, пересечённые третьей, которая называется секущей (см. рис. 113).

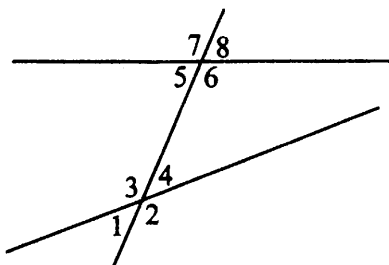


Рис. 113

$\angle 4$  и  $\angle 5$ ,  $\angle 3$  и  $\angle 6$  накрест лежащие;  $\angle 1$  и  $\angle 5$ ,  $\angle 4$  и  $\angle 8$ ,  $\angle 2$  и  $\angle 6$ ,  $\angle 3$  и  $\angle 7$  соответственные;  $\angle 4$  и  $\angle 6$ ,  $\angle 3$  и  $\angle 5$  односторонние.

- Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные накрест лежащие углы, то прямые параллельны.
- Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.
- Если при пересечении двух прямых третьей сумма односторонних углов равна  $180^\circ$ , то прямые параллельны.

Верно и обратное. При пересечении параллельных прямых секущей (см. рис. 114) накрест лежащие углы равны ( $\angle 4 = \angle 5$ ,  $\angle 3 = \angle 6$ ), соответственные углы равны ( $\angle 2 = \angle 6$ ,  $\angle 3 = \angle 7$ ,  $\angle 1 = \angle 5$ ,  $\angle 4 = \angle 8$ ), а сумма односторонних углов равна  $180^\circ$  ( $\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$ ,  $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$ ).



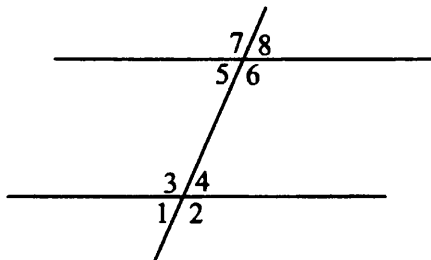


Рис. 114

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется длина перпендикуляра, соединяющего две точки этих прямых.

### 8 — Задачи с решениями

12. Докажите, что прямые  $a$  и  $b$  параллельны (см. рис. 115).

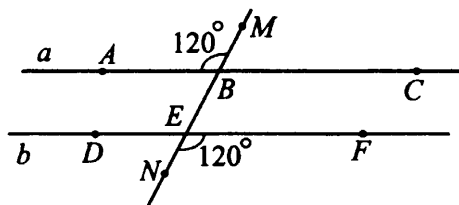


Рис. 115

*Решение.*

$\angle DEB = \angle FEN = 120^\circ$  (как вертикальные углы) и, следовательно,  $\angle DEB = \angle ABM$ .

Так как соответственные углы  $DEB$  и  $ABM$  равны, то прямые  $a$  и  $b$  параллельны.

### ① Немного полезной информации

**Срединным перпендикуляром** к отрезку называется прямая, перпендикулярная отрезку и проходящая через его

середины. Все точки, лежащие на серединном перпендикуляре к отрезку, равноудалены от его концов (например, на рисунке 116 прямая  $a$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ , а значит,  $CA = CB$ ).

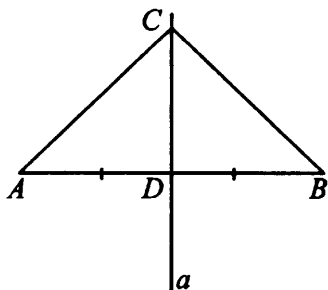


Рис. 116

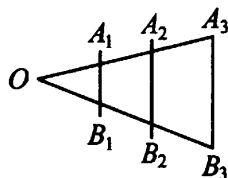


Рис. 117

**Теорема Фалеса.** Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Рассмотрим пример (см. рис. 117). Если  $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$  и  $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ , то  $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$ .

## Треугольник

Рассмотрим три точки, не лежащие на одной прямой. Это вершины треугольника. Соединим их отрезками — это будут стороны треугольника.

**Треугольником** называется многоугольник с тремя углами. Например, на рисунке 118 изображён  $\triangle ABC$  (так обозначается треугольник с заданными вершинами).

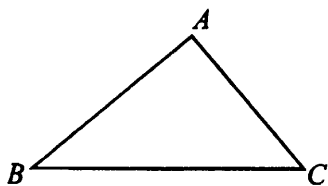


Рис. 118

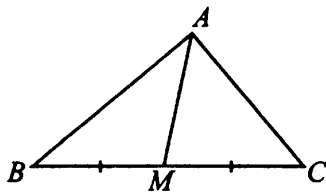


Рис. 119

**Периметром** треугольника называется сумма длин его сторон. Например, периметр  $\triangle ABC$  (см. рис. 118) равен  $AB + BC + CA$ .

**Медианой** треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Например,  $AM$  — медиана  $\triangle ABC$  (см. рис. 119).

**Биссектриса** треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой противоположной стороны. Проще говоря, отрезок  $AK$  — биссектриса треугольника  $ABC$ , если  $\angle BAK = \angle CAK$  (см. рис. 120).

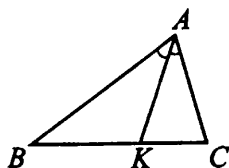


Рис. 120

**Высотой** треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны (или её продолжения) и перпендикулярный этой стороне. Например,  $AH$  — высота  $\triangle ABC$  (см. рис. 121).

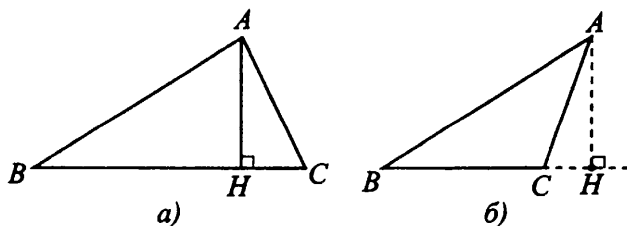


Рис. 121

### Задачи с решениями

13. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Сумма смежных углов равна  $90^\circ$ .
- 2) При пересечении параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны.
- 3) Вертикальные углы равны.
- 4) Если точки  $A_1, A_2$  лежат на одной стороне угла  $\angle B_2OA_2$ , а точки  $B_1, B_2$  — на другой,  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$  и  $OA_1 = A_1A_2$ , то  $B_1B_2 = 2OB_1$  (см. рис. 122).

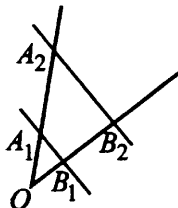


Рис. 122

- 5) Развёрнутым называется угол, меньший  $90^\circ$ .

*Решение.*

Утверждение 1) неверно, так как сумма смежных углов равна  $180^\circ$ .

Утверждение 2) верно, так как оно является свойством параллельных прямых.

Утверждение 3) верно по свойству вертикальных углов.

Утверждение 4) неверно, так как  $B_1B_2 = OB_1$  по теореме Фалеса (см. рис. 122).

Утверждение 5) неверно, так как развёрнутый угол равен  $180^\circ$ .

*Ответ:* 23.

### ① Немного полезной информации

Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ .

Сумма двух сторон треугольника больше третьей.

Против бóльшей стороны треугольника лежит бóльший угол.

Против бóльшего угла треугольника лежит его бóльшая сторона.

Треугольник, у которого один угол тупой, называется тупоугольным.

### Внешние углы треугольника

Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника, называется **внешним углом** треугольника. Например,  $\angle CBK$  (см. рис. 123) — внешний угол  $\triangle ABC$ .

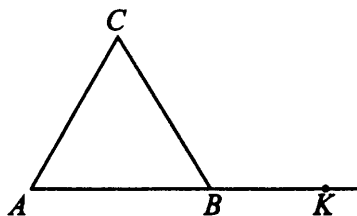


Рис. 123

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним ( $\angle CBK = \angle BCA + \angle BAC$ , см. рис. 123).

### Равенство треугольников

**Равные треугольники** — это такие треугольники, которые можно совместить друг с другом, наложив друг на друга так, чтобы они совпали.

### Признаки равенства треугольников.

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

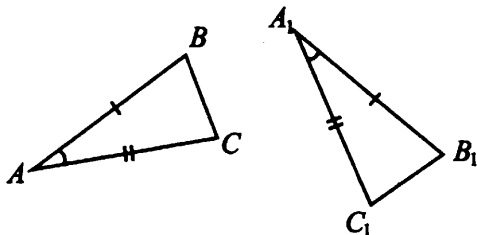


Рис. 124

Например, если  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$  (см. рис. 124), то  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

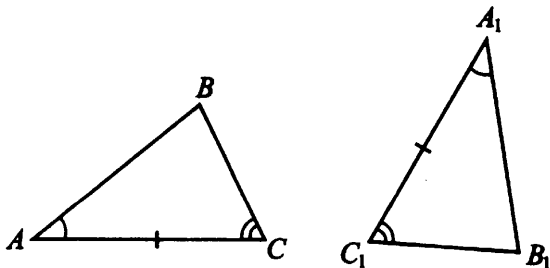


Рис. 125

Например, если  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$  и  $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$ , то  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  (см. рис. 125).

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

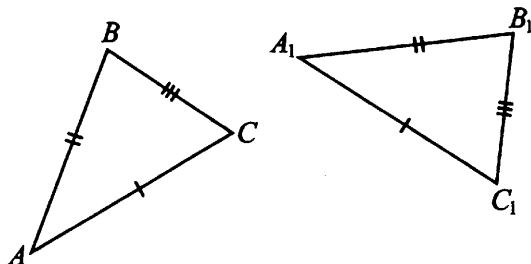


Рис. 126

Например, если  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$ ,  $AC = A_1C_1$ , то  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  (см. рис. 126).

### Подобие фигур

Часто встречаются фигуры, которые имеют разные размеры, но одинаковую форму, например, все круги или все квадраты. Такие фигуры называют подобными.

Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны друг другу ( $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ), если  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$  и  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$ , где  $k$  называют коэффициентом подобия (см. рис. 127).

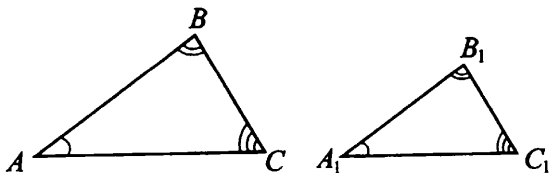


Рис. 127

В подобных треугольниках медианы, биссектрисы, высоты и периметры пропорциональны с тем же коэффициентом. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату

коэффициента подобия.  $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = k^2$ .

### Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Например, если  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ , то  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (см. рис. 128).

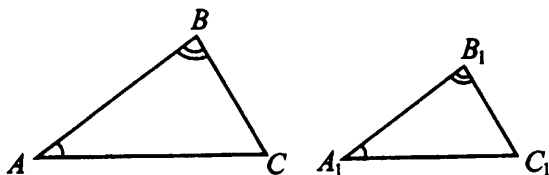


Рис. 128

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключённые между этими двумя сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

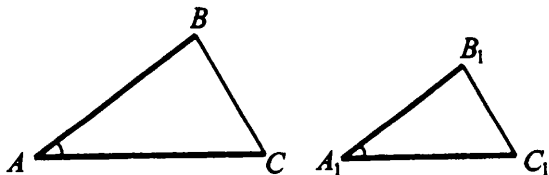


Рис. 129

Например, если  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$  и  $\angle A = \angle A_1$ , то  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (см. рис. 129).



3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.

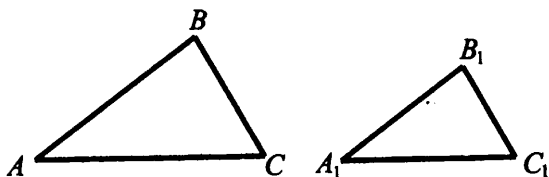


Рис. 130

Например, если  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$ , то  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (см. рис. 130).

### 8 — Задачи с решениями

14. Найдите градусную меру угла  $\angle C$  треугольника  $ABC$  (см. рис. 131), если  $\angle A = 120^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ .

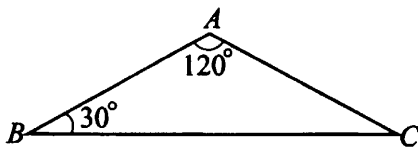


Рис. 131

*Решение.*

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ , откуда  $120^\circ + 30^\circ + \angle C = 180^\circ$ ,  $\angle C = 30^\circ$ .

*Ответ:* 30.

15. Найдите градусную меру меньшего угла между биссектрисами углов  $\triangle ABC$ , проведёнными из вершин  $A$  и  $C$ , если  $\angle B = 110^\circ$ ,  $\angle C = 24^\circ$ .

*Решение.*

Найдём угол  $A$ , используя теорему о сумме углов треугольника.

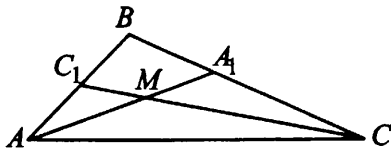


Рис. 132

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

$$\angle A = 180^\circ - 110^\circ - 24^\circ = 46^\circ.$$

$AA_1$  и  $CC_1$  — биссектрисы (см. рис. 132), поэтому  $\angle MCA = \angle C : 2 = 24^\circ : 2 = 12^\circ$ .

Меньший угол между биссектрисами — это внешний угол  $\triangle AMC$ ,  $\angle A_1MC = \angle MAC + \angle MCA = 23^\circ + 12^\circ = 35^\circ$ .

*Ответ:* 35.

16. Найдите сторону  $A_1C_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$ , если  $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$ ,  $\angle B_1C_1A_1 = \angle BCA$ ,  $AC = 10$ ,  $B_1C_1 = 4$ ,  $BC = 8$  (см. рис. 133).

*Решение.*

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  по двум углам (первый признак подобия треугольников).  $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$ ;  $\frac{4}{8} = \frac{A_1C_1}{10}$ ;

$$A_1C_1 = 10 \cdot \frac{4}{8} = 5.$$

*Ответ:* 5.

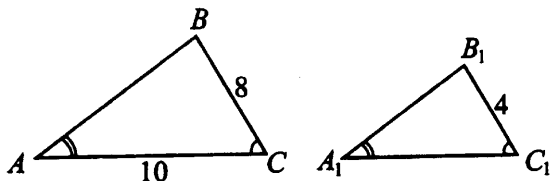


Рис. 133

### ① Немного полезной информации

Часто углы измеряют не в градусах, а в радианах.

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$  (радиан), впрочем, единицу измерения часто опускают.

$30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ ;  $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ ,  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ ,  $180^\circ = \pi$  (радиан)

и т. д.

### Прямоугольный треугольник

Треугольник называется **прямоугольным**, если один из его углов равен  $90^\circ$ . Сторона, лежащая против угла  $90^\circ$  (прямого угла), называется **гипотенузой**, две другие — **катетами**.

#### Теорема Пифагора.

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Например,  $AB^2 = AC^2 + BC^2$  (см. рис. 134).

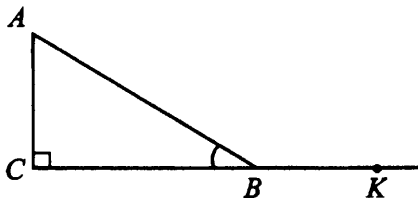


Рис. 134

**Синусом** острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

**Косинусом** острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Например,  $\sin \angle B = \frac{AC}{AB}$ ,  $\cos \angle B = \frac{CB}{AB}$  (см. рис. 134).

Для любого угла можно найти его синус и косинус, они зависят только от градусной меры угла.

Синус угла равен синусу смежного с ним угла ( $\sin \angle ABK = \sin \angle CBA$ ).

Косинусы смежных углов — противоположные числа ( $\cos \angle ABK = -\cos \angle CBA$ ).

### Значения синуса и косинуса некоторых углов

$\alpha$	градусы	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
	радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	

В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла  $30^\circ$ , равен половине гипотенузы. На рисунке 135 в  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ , значит,  $BC = \frac{1}{2}AB$ .

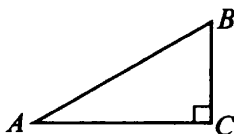


Рис. 135

### 8 — Задачи с решениями

17. Найдите  $\cos 120^\circ$ .

*Решение.*

Так как угол в  $120^\circ$  смежен с углом в  $60^\circ$  ( $120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ ), то  $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} = -0,5$ .

*Ответ:*  $-0,5$ .

18. Найдите сторону  $AC$  треугольника  $ABC$ , если  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $BC = 4$  (см. рис. 136).

*Решение.*

По теореме Пифагора  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , откуда  $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ ,  $AC = \sqrt{9} = 3$ .

*Ответ:* 3.

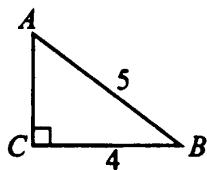


Рис. 136

### ① Немного полезной информации

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией** треугольника. Она параллельна стороне треугольника и равна её половине.  $MN \parallel AC$ ,

$MN = \frac{1}{2}AC$  (см. рис. 137).

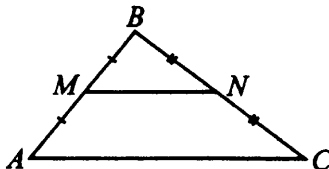


Рис. 137

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины. На рисунке

$$138 \text{ получаем } \frac{CO}{C_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AO}{A_1O} = \frac{2}{1}.$$

Например, если  $BB_1 = 12$ , то  $BO = \frac{2}{3}BB_1 = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8$  и

$$OB_1 = \frac{1}{3}BB_1 = 4.$$

Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

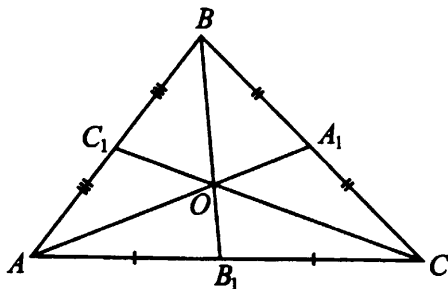


Рис. 138

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

### Равнобедренный и равносторонний треугольники

Треугольник называется **равнобедренным**, если две его стороны равны. Они называются боковыми сторонами. Третья сторона называется основанием. На рисунке 139  $AB = BC$ ,  $AC$  — основание  $\triangle ABC$ .

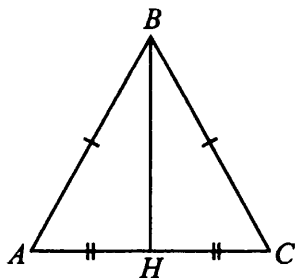


Рис. 139

В равнобедренном треугольнике углы, прилежащие к основанию, равны ( $\angle BCA = \angle BAC$  на рисунке 139), а высота, медиана и биссектриса, проведённые к основанию, совпадают.  $BH$  является одновременно и медианой, и биссектрисой, и высотой в  $\triangle ABC$  на рисунке 139.

Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный. На рисунке 140  $\angle ABC = \angle ACB$ , а значит,  $\triangle ABC$  равнобедренный ( $AB = AC$ ).

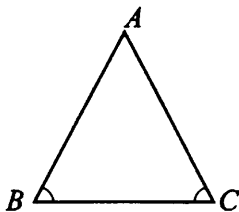


Рис. 140

Треугольник называется **равносторонним**, если все его стороны равны. Равносторонние треугольники также называют правильными.

В равностороннем треугольнике все углы равны  $60^\circ$ , а медиана, биссектриса и высота, проведённые к любой из его сторон, совпадают.

Если в треугольнике все углы равны, то треугольник равносторонний.

### 8 — Задачи с решениями

19. Найдите сторону  $AC$  треугольника  $ABC$ , если  $\angle BAC = 120^\circ$ ,  $\angle ABC = 30^\circ$ , а  $AB = 5$ .

*Решение.*

$\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \angle ABC$ , значит,  $\triangle ABC$  равнобедренный и  $AC = AB = 5$  (см. рис. 141).

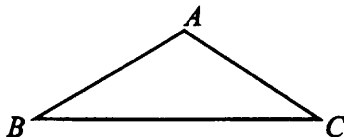


Рис. 141

*Ответ:* 5.

20. Медианы  $AA_1$  и  $BB_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите  $AO$ , если  $AA_1 = 6$ .

*Решение.*

$O$  — точка пересечения медиан (см. рис. 142).

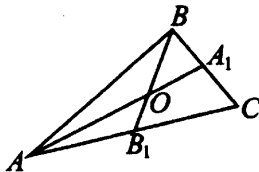


Рис. 142



$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{2}{1} = 2, AO = 2OA_1, AO + A_1O = AA_1 = 6,$$

$$2OA_1 + OA_1 = 6, 3OA_1 = 6, OA_1 = 2, AO = 2OA_1 = 4.$$

Ответ: 4.

21. Периметр треугольника равен 39. Найдите его стороны, если стороны подобного ему треугольника равны 3, 4 и 6.

Решение.

Пусть коэффициент подобия треугольников равен  $k$ . Тогда искомые стороны равны  $3k$ ,  $4k$  и  $6k$ . Периметр  $P = 3k + 4k + 6k = 39$ .  $k = 3$ . Найдём стороны: 9, 12 и 18.

Ответ: 9, 12, 18.

## Площадь треугольника

### ① Немного полезной информации

Площадь треугольника равна половине произведения любой его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH \text{ (см. рис. 143).}$$

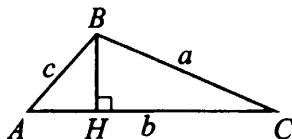


Рис. 143

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot AC \cdot \sin \angle A \text{ (см. рис. 143).}$$

Треугольники с равной площадью называются равновеликими.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$  (см. рис. 144).

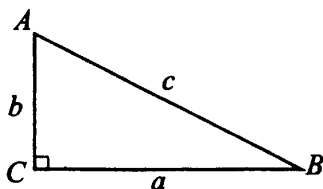


Рис. 144

Если  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  и  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$ ,

то  $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$ .

### ☞ Задачи с решениями

22. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 145.

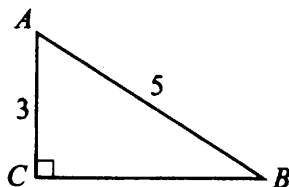


Рис. 145

*Решение.*

По теореме Пифагора  $CB^2 + AC^2 = AB^2$ ,

$$CB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6.$$

*Ответ:* 6.

23. Найдите площади треугольников, изображённых на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 146). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

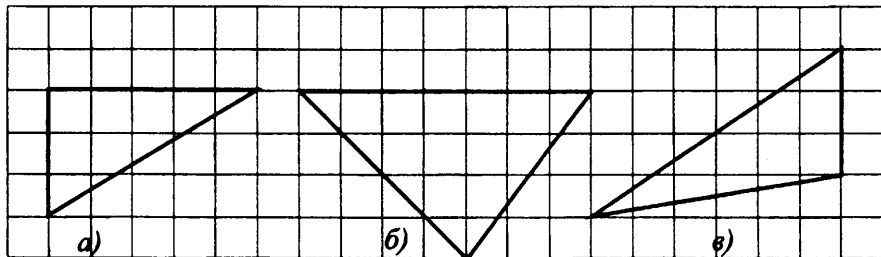


Рис. 146

*Решение.*

а) Треугольник является прямоугольным. По рисунку катеты равны 3 и 5, площадь  $S = 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 7,5$ .

Проведём высоты на рисунках б) и в) (см. рис. 147).

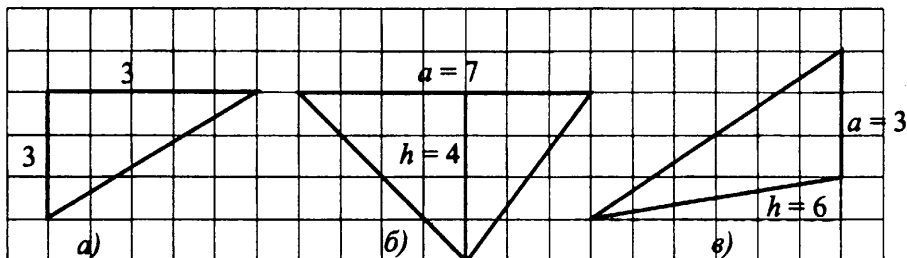


Рис. 147

Найдём площадь  $S$  по формуле  $S = \frac{1}{2}ah$ .

$$\text{б) } S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 = 14; \quad \text{в) } S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9.$$

*Ответ:* а) 7,5, б) 14, в) 9.

24. Найдите площадь  $\triangle ABC$ , изображённого на рисунке 148.

*Решение.*

$\triangle ABC$  равнобедренный, высота  $BH$  является медианой, то есть  $AH = HC = 14 : 2 = 7$ .

Найдём высоту  $BH$  из прямоугольного  $\triangle ABH$ .

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 25^2 - 7^2 = 576,$$

$$BH = 24. \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 24 = 168.$$

*Ответ:* 168.

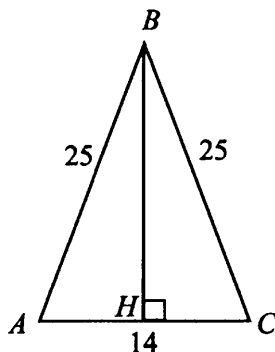


Рис. 148

### ❓ Варианты для самостоятельного решения

#### Вариант 1

1. По данным рисунка 149 найдите  $\angle 1$ , если  $a \parallel b$ . Ответ дайте в градусах.

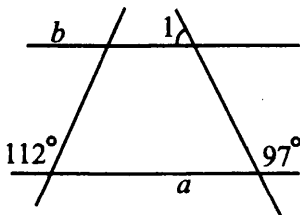


Рис. 149

2. Дан треугольник  $ABC$  со сторонами 9, 4 и 7 (см. рис. 150). Найдите периметр треугольника  $MNK$ , вершинами которого являются середины данных сторон.

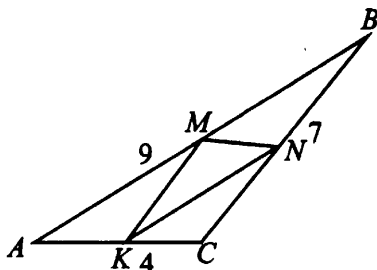


Рис. 150

3. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , изображённого на рисунке 151.

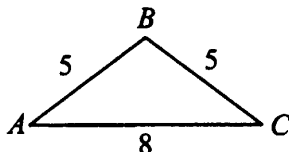


Рис. 151

4. Найдите периметр прямоугольного треугольника с катетами  $AC = 6$ ,  $BC = 8$ .

5. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
- 2) Величина одного из углов треугольника может быть равна  $182^\circ$ .
- 3) Если два угла треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.
- 4) В треугольнике против большей стороны лежит меньший угол.
- 5) Смежные углы составляют в сумме  $180^\circ$ .

## Вариант 2

1. По данным рисунка 152 найдите  $\angle 1$ , если  $p \parallel q$ . Ответ дайте в градусах.

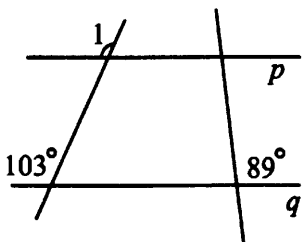


Рис. 152

2. Дан треугольник  $ABC$  со сторонами 3, 4 и 6. Найдите периметр подобного ему треугольника  $A_1B_1C_1$ , если коэффициент подобия равен 2 и периметр треугольника  $A_1B_1C_1$  больше периметра треугольника  $ABC$ .

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 153.

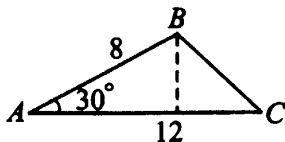


Рис. 153

4. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны 9 и 12.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) Если углы при основании треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

- 2) Если две стороны треугольника равны, то он равносторонний.
- 3) Все высоты треугольника пересекаются в одной точке.
- 4) Площадь треугольника равна произведению стороны на высоту, перпендикулярную этой стороне.
- 5) Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

### Вариант 3

1. По данным рисунка 154 найдите  $\angle 1$ , если  $m \parallel n$ . Ответ дайте в градусах.

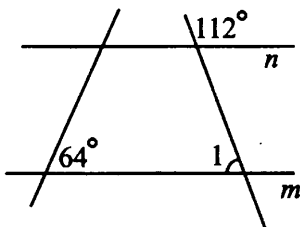


Рис. 154

2. Дан треугольник со сторонами 6, 8 и 12. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его периметр равен 13.
3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 155.

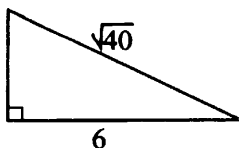


Рис. 155

4. Найдите периметр прямоугольного треугольника, если один из катетов равен 8, а гипотенуза равна 10.
5. Укажите номера неверных утверждений.
- 1) В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию треугольника, является медианой.
  - 2) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.
  - 3) Сумма углов треугольника больше  $180^\circ$ .
  - 4) В треугольнике против большего угла лежит меньшая сторона.
  - 5) Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

### Вариант 4

1. На рисунке 156  $a \parallel b$ ,  $OA : AB = 2 : 3$ ,  $AC = 4$ . Найдите  $BD$ .

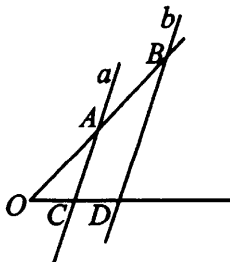


Рис. 156



2. Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны. Их сходственные стороны относятся как  $1 : 3$   $\left(\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{1}{3}\right)$ .

Найдите площадь треугольника  $A_1B_1C_1$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна 72.

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 157.

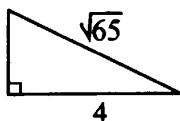


Рис. 157

4. Найдите  $BO$ , если  $O$  — точка пересечения медиан  $\triangle ABC$ ,  $AB = BC = 5$ ,  $AC = 8$ , медиана  $BH = 3$  (см. рис. 158).

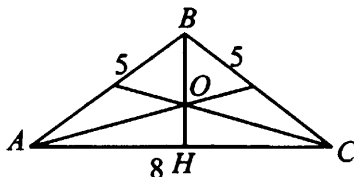


Рис. 158

5. Укажите номера верных утверждений.

- 1) В треугольнике медиана не меньше высоты, проведённой из той же вершины.
- 2) В треугольнике все высоты пересекаются в одной точке.
- 3) В прямоугольном треугольнике гипотенуза меньше катета.
- 4) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести бесчисленное множество прямых, параллельных данной прямой.
- 5) Треугольники, имеющие равные площади, равны.

## Вариант 5

1. На рисунке 159  $a \parallel b$ ,  $AB : CD = 5 : 3$ ,  $OA = 10$ . Найдите  $AC$ .

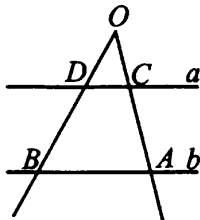


Рис. 159

2. Стороны треугольника  $ABC$  равны 12, 15 и 18. Найдите стороны треугольника  $A_1B_1C_1$ , подобного данному, если отношение их периметров равно 3  $\left(\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = 3\right)$ .

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 160.

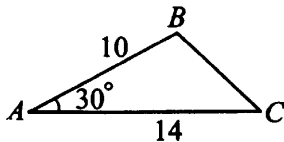


Рис. 160

4. Найдите катет  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  (см. рис. 161).

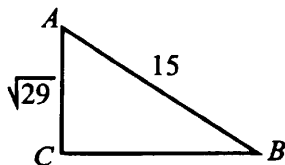


Рис. 161

5. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Треугольники, имеющие общее основание и вершины, равноудалённые от прямой, содержащей это основание, равновелики.
- 2) Во всяком треугольнике высота, проведённая к основанию, совпадает с медианой.
- 3) Если один из углов треугольника острый, то такой треугольник остроугольный.
- 4) В равнобедренном треугольнике биссектриса и медиана, проведённые из вершины, противоположной основанию, равны.
- 5) Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

### Вариант 6

1. На рисунке 162  $a \parallel b$ ,  $AB : CD = 4 : 1$ ,  $OA = 8$ . Найдите  $OC$ .

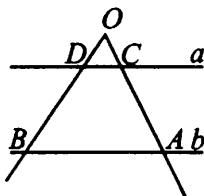


Рис. 162

2. Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны. Их сходственные стороны соответственно  $AB = 2$  и  $A_1B_1 = 5$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если площадь треугольника  $A_1B_1C_1$  равна 100.

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 163.

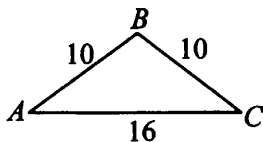


Рис. 163

4. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, у которого один из катетов равен 10, а противолежащий ему угол равен  $30^\circ$ .

5. Укажите номера неверных утверждений.

- 1) Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ .
- 2) Внешний угол треугольника всегда тупой.
- 3) В равностороннем треугольнике  $ABC$  медиана  $AK$  равна высоте  $CH$ .
- 4) Площадь прямоугольного треугольника равна произведению двух катетов.
- 5) Внешний угол треугольника всегда больше внутреннего.

## Глава 7. Многоугольники

### ① Немного полезной информации

#### Параллелограмм

**Параллелограмм** — это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. На рисунке 164  $ABCD$  — параллелограмм, так как  $AB \parallel CD$  и  $BC \parallel AD$ .

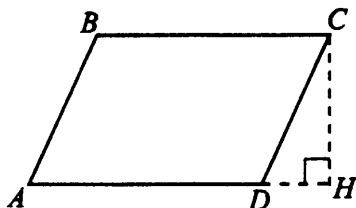


Рис. 164

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, проведённую к этому основанию.  
 $S_{ABCD} = AD \cdot CH$  (см. рис. 164).

Площадь параллелограмма равна произведению двух его сторон на синус угла между ними:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD \text{ (см. рис. 164).}$$

Свойства:

1) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна  $180^\circ$ . То есть  $\angle A + \angle B = 180^\circ$  и  $\angle B + \angle C = 180^\circ$  (см. рис. 164).

2) В параллелограмме противоположные стороны равны, то есть  $AB = CD$ ,  $AD = BC$  (см. рис. 164).

3) В параллелограмме противоположные углы равны, то есть  $\angle A = \angle C$ ,  $\angle B = \angle D$  (см. рис. 164).

4) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, т. е.  $AM = MC$ ,  $BM = MD$  (см. рис. 165).

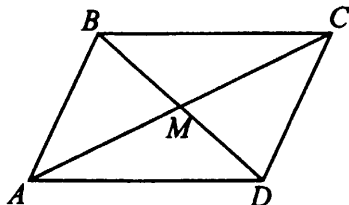


Рис. 165

### Признаки параллелограмма

1) Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм. То есть, если  $AB \parallel CD$  и  $AB = CD$ , то  $ABCD$  — параллелограмм (см. рис. 166).

2) Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм. То есть, если  $AB = CD$  и  $BC = AD$ , то  $ABCD$  — параллелограмм (см. рис. 166).

3) Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

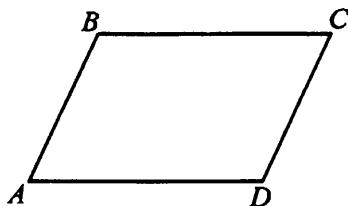


Рис. 166

### 8 — Задачи с решениями

6. В четырёхугольнике  $ABCD$   $AB = CD = 5$ ,  $\angle DBA = \angle CDB = 30^\circ$ . Найдите  $AO$ , если  $AC = 8$  (см. рис. 167).

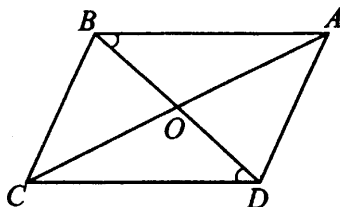


Рис. 167

*Решение.*

Так как  $\angle DBA = \angle CDB$ , то  $CD \parallel AB$  по признаку параллельных прямых. Тогда  $ABCD$  — параллелограмм. ( $AB = CD$ ,  $AB \parallel CD$  — первый признак параллелограмма). Значит, по свойству 4) параллелограмма получаем

$$AO = \frac{1}{2}AC = 4.$$

*Ответ:* 4.

7. Найдите площади параллелограммов, изображённых на рисунке 168, если величина клетки равна 1.

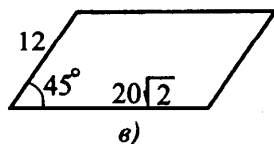
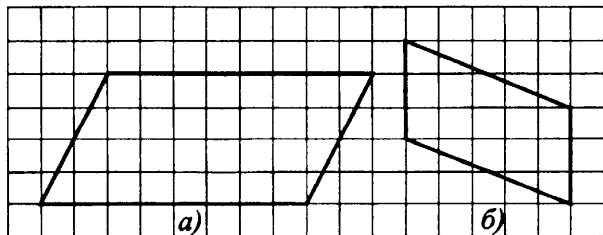


Рис. 168

*Решение.*

Проведём высоты в параллелограммах а) и б) (см. рис. 169) и по клеточкам посчитаем их основания  $a$  и высоты  $h$ . После этого вычислим площадь  $S = ah$ .

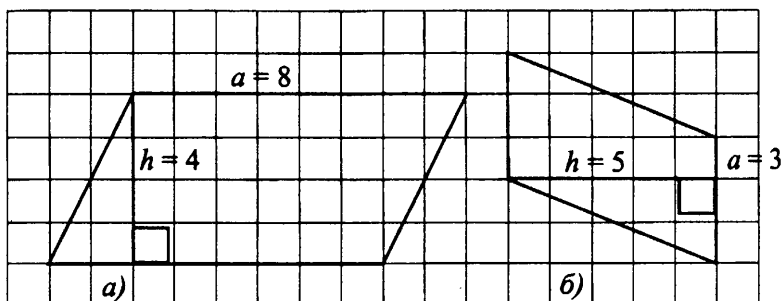


Рис. 169

а)  $a = 8, h = 4, S = 8 \cdot 4 = 32$ .

б)  $a = 3, h = 5, S = 3 \cdot 5 = 15$ .

в) Вычислим площадь по формуле  $S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$ , где  $a = 20\sqrt{2}$ ,  $b = 12$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

$$S = 20\sqrt{2} \cdot 12 \cdot \sin 45^\circ = 240\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 240.$$

*Ответ:* а) 32, б) 15, в) 240.

## Трапеция

### ① Немного полезной информации

**Трапецией** называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны (основания трапеции), а две другие не параллельны. Пример трапеции — на рисунке 170, где  $BC$  и  $AD$  — основания, а  $AB$  и  $CD$  — боковые стороны.

**Средней линией трапеции** называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон ( $MK$  в трапеции  $ABCD$



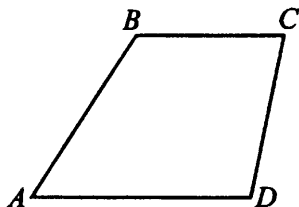


Рис. 170

на рисунке 171). Средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме,  $MK = \frac{1}{2}(BC + AD)$ .

Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту,  $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH$  (см. рис. 171).

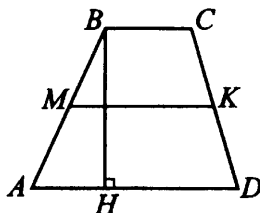


Рис. 171

Трапеция называется **равнобедренной**, если её боковые стороны равны ( $AB = CD$  в трапеции  $ABCD$  на рисунке 172).

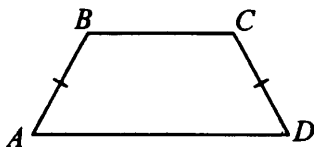


Рис. 172

В равнобедренной трапеции углы при каждом из оснований равны ( $\angle A = \angle D$ ,  $\angle B = \angle C$  на рисунке 172). Верно и обратное утверждение: если в трапеции углы при основании равны, то трапеция равнобедренная.

В равнобедренной трапеции диагонали равны. Верно и обратное утверждение: если в трапеции диагонали равны, то она равнобедренная.

### 🔗 Задачи с решениями

8. Найдите площадь трапеции на рисунке 173.

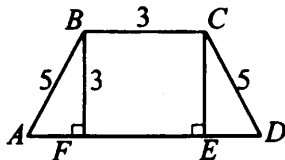


Рис. 173

*Решение.*

Заметим, что  $BFEC$  — параллелограмм (так как стороны попарно параллельны), откуда  $FE = BC$ .

Из  $\triangle ABF$  по теореме Пифагора найдём

$$AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{25 - 9} = 4. \text{ Аналогично } ED = 4.$$

$$AD = AF + FE + ED = 4 + 3 + 4 = 11.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BF = \frac{42}{2} = 21.$$

Ответ: 21.

### Прямоугольник, ромб, квадрат

**Прямоугольник** — это параллелограмм, у которого все углы прямые (см. рис. 174).

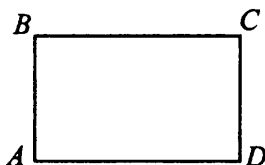


Рис. 174

Признак прямоугольника: если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Рассмотрим рисунок 175. Если мы знаем, что  $ABCD$  — параллелограмм и  $AC = BD$ , то мы можем утверждать, что  $ABCD$  — прямоугольник.

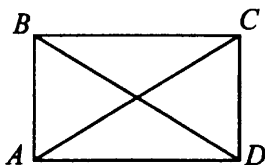


Рис. 175

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон ( $S_{ABCD} = AB \cdot AD$  на рисунке 175). Диагонали любого прямоугольника равны.

Другим видом параллелограмма является **ромб** — четырёхугольник, все стороны которого равны между собой (см. рис. 176). Ромб является параллелограммом, диагонали которого взаимно перпендикулярны ( $AC \perp BD$  на рисунке 177).

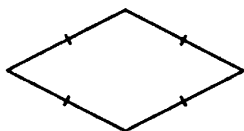


Рис. 176

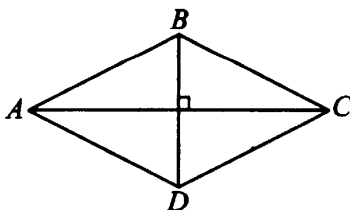


Рис. 177

Признак ромба: если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом. Если  $ABCD$  — параллелограмм и  $AC \perp BD$ , то  $ABCD$  — ромб (см. рис. 177).

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$  для ромба  $ABCD$  на рисунке 177.

**Квадрат** — это такой прямоугольник, у которого все стороны равны (см. рис. 178).

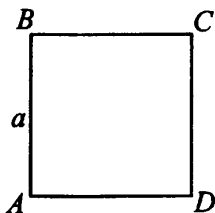


Рис. 178

Квадрат также является ромбом, а потому сочетает в себе свойства и прямоугольника, и ромба.

Диагональ квадрата  $d = \sqrt{2} \cdot a$ , если  $a$  — сторона квадрата.

Площадь квадрата равна квадрату его стороны, то есть  $S_{ABCD} = AB^2 = a^2$  (см. рис. 178).

Если известна диагональ квадрата  $d$ , его площадь можно найти по формуле  $S = \frac{1}{2}d^2$ .

### ☞ Задачи с решениями

9. Найдите площадь и высоту ромба  $ABCD$ , изображённого на рисунке 179.

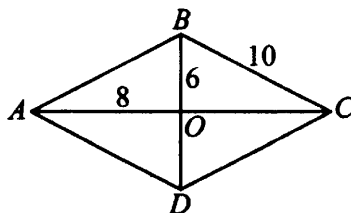


Рис. 179

*Решение.*

$BD = 2BO = 2 \cdot 6 = 12$ ,  $AC = 2AO = 2 \cdot 8 = 16$ , так как ромб — параллелограмм и диагонали точкой пересечения делятся пополам.  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96$ .

С другой стороны,  $S_{ABCD} = AB \cdot h$ , где  $h$  — высота ромба.  $AB \cdot h = 96$ ,  $h = 96 : 10 = 9,6$ .

*Ответ:* 96; 9,6.

10. Укажите номера верных утверждений.

- 1) В равностороннем треугольнике все углы равны  $90^\circ$ .
- 2) Любой прямоугольник является ромбом.
- 3) В равнобедренной трапеции углы при основании равны.
- 4) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
- 5) Сумма двух соседних углов ромба может быть больше  $180^\circ$ .

*Решение.*

Утверждение 1) неверно, так как в равностороннем треугольнике все углы равны  $60^\circ$ .

Утверждение 2) неверно, так как легко привести пример прямоугольника, который не является ромбом (см. рис. 180).

Утверждение 3) верно, оно является свойством равнобедренной трапеции.

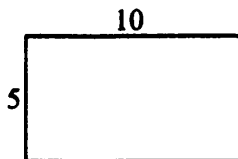


Рис. 180

Утверждение 4) верно, оно является свойством параллелограмма.

Утверждение 5) неверно, так как сумма соседних углов любого параллелограмма равна  $180^\circ$ .

Ответ: 34.

### ① Немного полезной информации

#### Многоугольники

Конечно, бывают не только треугольники и четырёхугольники. Иногда встречаются и тринадцатигульники, и даже 523-угольники. Все многоугольники ( $n$ -угольники) подчиняются некоторым общим законам: например, сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $(n-2) \cdot 180^\circ$ . Так, для треугольника сумма углов  $(3-2) \cdot 180^\circ = 180^\circ$ , для четырёхугольника —  $(4-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$ , для 13-угольника —  $(13-2) \cdot 180^\circ = 1980^\circ$ .

**Правильным многоугольником** называется многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны. На рисунке 181 можно увидеть правильный пятиугольник.

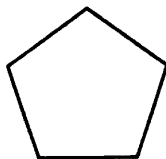


Рис. 181

## ❓ Варианты для самостоятельного решения

### Вариант 1

1. Найдите периметр параллелограмма, изображённого на рисунке 182.

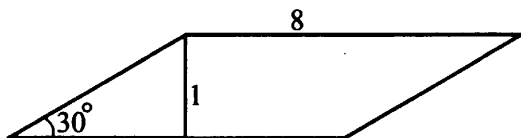


Рис. 182

2. В ромбе  $ABCD$   $\angle ADC = 120^\circ$  (см. рис. 183). Найдите величину  $\angle DAB$  (в градусах).

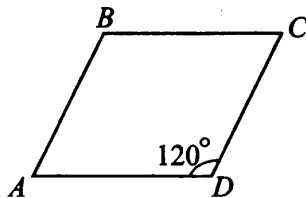


Рис. 183

3. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 6 см, а один из углов  $30^\circ$ .

4. Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $540^\circ$ . Найдите количество сторон  $n$ -угольника.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

2) Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

3) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

4) Диагонали параллелограмма равны.

5) Отрезок, соединяющий середины любых двух сторон трапеции, является её средней линией.

## Вариант 2

1. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке 184.

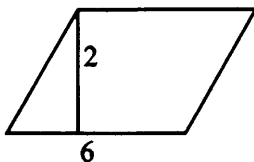


Рис. 184

2. Пользуясь данными рисунка 185, найдите градусную меру  $\angle ABO$ , учитывая, что  $ABCD$  — ромб. Ответ дайте в градусах.

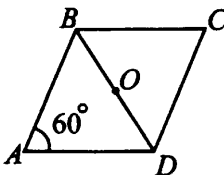


Рис. 185

3. Найдите площадь трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AB = 15$ ,  $CD = 8$  и высотой, равной 6.

4. Найдите сумму углов выпуклого восьмиугольника. Ответ дайте в градусах.

5. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Диагонали ромба равны и взаимно перпендикулярны.
- 2) Сумма углов трапеции равна  $180^\circ$ .
- 3) Сумма внутренних углов ромба равна  $360^\circ$ .
- 4) Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту.
- 5) Если один из углов параллелограмма равен  $90^\circ$ , то этот параллелограмм — прямоугольник.



**Вариант 3**

1. Найдите углы, прилежащие к одной из сторон параллелограмма, если один из его внешних углов равен  $70^\circ$ . Ответ дайте в градусах.
2. В квадрате диагональ равна  $\sqrt{2}$ . Найдите сторону квадрата.
3. Найдите площадь ромба, если сторона ромба равна 4 и один из углов ромба равен  $30^\circ$ .
4. Найдите количество сторон выпуклого  $n$ -угольника, если сумма его углов равна  $900^\circ$ .
5. Укажите номера неверных утверждений.
  - 1) Сумма углов параллелограмма равна  $360^\circ$ .
  - 2) Противоположные углы параллелограмма в сумме составляют  $180^\circ$ .
  - 3) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.
  - 4) Углы, прилежащие к одной стороне трапеции, в сумме всегда составляют  $180^\circ$ .
  - 5) Диагонали ромба равны.

**Вариант 4**

1. Найдите бóльшую сторону параллелограмма, если его периметр равен 10 и одна сторона на единицу больше другой.
2. Один из углов ромба равен  $100^\circ$ . Найдите углы, которые образует со сторонами бóльшая диагональ ромба. Ответ дайте в градусах.
3. В трапеции верхнее основание равно 5, нижнее основание 17. Найдите длину отрезка, соединяющего середины боковых сторон трапеции.
4. Найдите величину угла правильного двенадцатиугольника. Ответ дайте в градусах.
5. Укажите номера верных утверждений.
  - 1) Диагонали равнобедренной трапеции равны.
  - 2) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
  - 3) В параллелограмме суммы противоположных углов равны  $180^\circ$ .
  - 4) Если углы при основании трапеции равны, то её боковые стороны тоже равны.
  - 5) Сумма углов трапеции равна  $540^\circ$ .

## Вариант 5

1. В параллелограмме одна из сторон равна 15. Найдите соседнюю с ней сторону, если периметр параллелограмма равен 70.

2. В ромбе  $ABCD$   $\angle A = 142^\circ$  (см. рис. 186). Найдите величину угла, смежного с внутренним углом  $B$ . Ответ дайте в градусах.

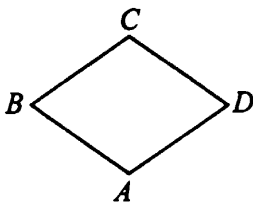


Рис. 186

3. Найдите площадь трапеции, если её основания 16 и 10, а высота равна 4.

4. Найдите больший угол (в градусах) выпуклого четырёхугольника, если его углы относятся как 3 : 5 : 7 : 9.

5. Укажите номера неверных утверждений.

1) Если в четырёхугольнике сумма двух углов, прилежащих к одной из его сторон, равна  $180^\circ$ , то такой четырёхугольник — параллелограмм.

2) В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны.

3) Прямые, содержащие боковые стороны трапеции, параллельны.

4) Диагонали ромба пересекаются и взаимно перпендикулярны.

5) Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, к ней проведённую.

## Вариант 6

1. Найдите периметр параллелограмма, изображённого на рисунке 187.

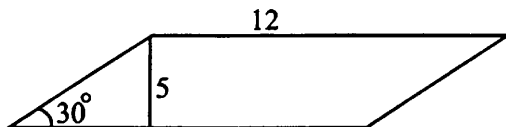


Рис. 187

2. В квадрате диагональ равна  $5\sqrt{2}$ . Найдите сторону квадрата.

3. В трапеции нижнее основание равно 20, верхнее — 8. Найдите длину отрезка, соединяющего середины боковых сторон трапеции.

4. Найдите величину угла правильного двадцатиугольника. Ответ дайте в градусах.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) В параллелограмме сумма двух углов, прилежащих к одной стороне, равна  $90^\circ$ .

2) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

3) В параллелограмме противоположные стороны равны и соседние углы равны.

4) Если один из углов параллелограмма тупой, то соседний с ним угол параллелограмма острый.

5) Биссектрисы углов ромба пересекаются в одной точке.

## Глава 8. Окружность и круг

### Окружность и круг

**Окружностью** называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки (центра окружности). Пример окружности изображён на рисунке 188.

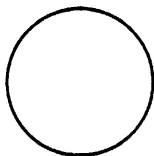


Рис. 188

Отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо точкой окружности, называется **радиусом**.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**. Хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром**. Диаметр — это наибольшая хорда окружности. Диаметр в 2 раза больше радиуса.

На рисунке 189 точка  $O$  — центр окружности,  $OA$  и  $OB$  — радиусы,  $AB$  и  $CD$  — хорды, при этом  $AB$  — диаметр.

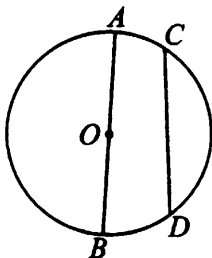


Рис. 189

Любые две точки окружности делят её на две части. Каждая из этих частей называется **дугой** окружности. На рисунке 190 обозначены  $\smile ANB$  и  $\smile AMB$  — дуги, ограниченные точками  $A$  и  $B$ . Если из контекста понятно, о какой дуге идёт речь, то её обозначают только с помощью двух граничных точек, например,  $\smile AB$  (см. рис. 190).

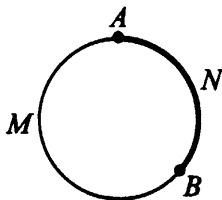


Рис. 190

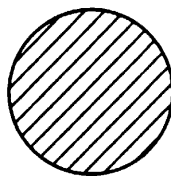


Рис. 191

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом** (см. рис. 191).

### Взаимное расположение прямой и окружности

Окружность и прямая могут иметь две общие точки (см. рис. 192 а), одну общую точку (см. рис. 192 б) или не иметь общих точек (см. рис. 192 в).

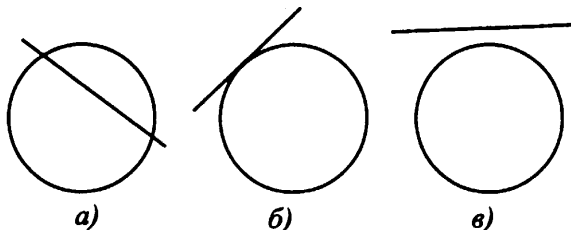


Рис. 192

Если общих точек 2, то прямая называется **секущей** (см. рис. 192 а), если такая точка одна, то прямая называется **касательной** (см. рис. 192 б).

Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. На рисунке 193 касательная  $a \perp OA$ .

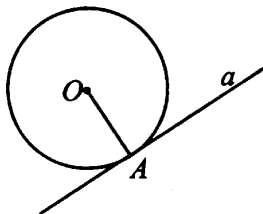


Рис. 193

### Взаимное расположение двух окружностей

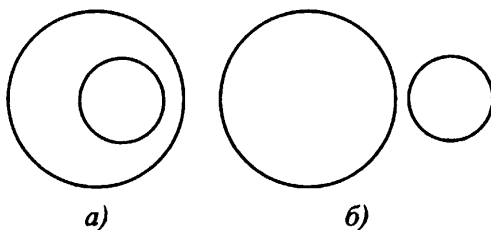


Рис. 194

Две окружности могут не иметь общих точек (см. рис. 194), иметь одну общую точку (см. рис. 195) либо иметь две общие точки (см. рис. 196).

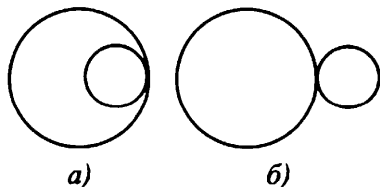


Рис. 195

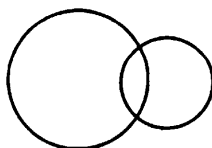


Рис. 196

Если две окружности касаются, их центры и точка касания лежат на одной прямой (см. рис. 197).

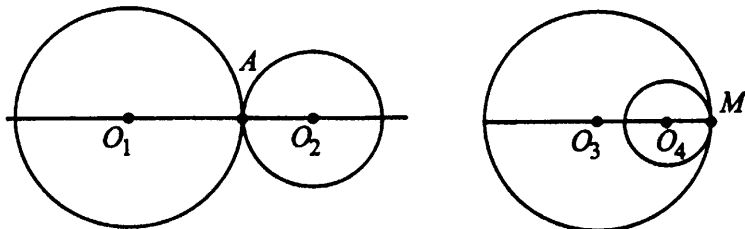


Рис. 197

$$O_1O_2 = O_1A + AO_2, \quad O_3O_4 = O_3M - O_4M.$$

### Длина окружности и площадь круга

Если радиус окружности равен  $R$ , то длина окружности  $l = 2\pi R$ , а площадь круга, ограниченного данной окружностью,  $S = \pi R^2$ . Зная диаметр ( $d$ ), можно найти длину окружности как  $l = \pi d$ , а площадь круга как  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ .

### Углы, связанные с окружностью

Угол с вершиной в центре окружности называется **центральный** (см. рис. 198). Угловая величина дуги равна величине центрального угла, на неё опирающегося.

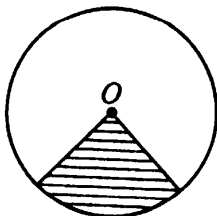


Рис. 198

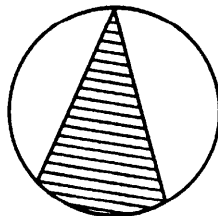


Рис. 199



Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным** (см. рис. 199).

Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны. На рисунке 200  $\angle ABC = \angle AMC$ .

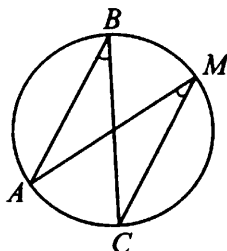


Рис. 200

Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами. На рисунке 201

$$\alpha = \frac{1}{2}(\smile AMB + \smile CND).$$

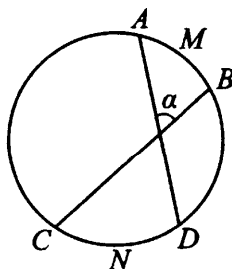


Рис. 201

Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности. На рисунке 202 угол  $\alpha = \frac{1}{2}(\sphericalangle AMB - \sphericalangle CND)$ .

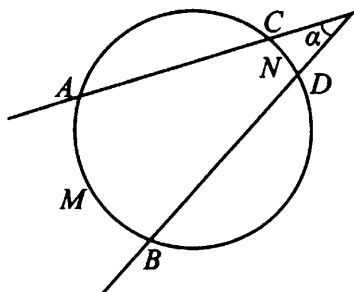


Рис. 202

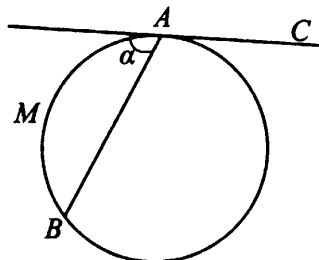


Рис. 203

Угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.  $\alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB$  на рисунке 203.

### Длина дуги и площадь сектора

Рассмотрим дугу окружности радиуса  $R$  и центральный угол, на неё опирающийся. Если величина центрального угла (в градусах) равна  $\alpha$ , то длина дуги равна  $\frac{\pi R \alpha}{180}$ . Например, если  $\alpha = 60^\circ$ ,  $R = 5$ , то длина дуги  $\sphericalangle AB$  равна  $\frac{5\pi \cdot 60}{180} = \frac{5\pi}{3}$  (см. рис. 204).

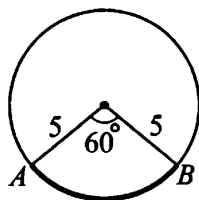


Рис. 204

**Круговым сектором** (или просто сектором) называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами. Дуга, которая ограничивает сектор, называется **дугой сектора** ( $\smile AB$  на рисунке 205). Если её величина равна  $\alpha$  (в градусах), то площадь сектора равна  $\frac{\pi R^2}{360} \alpha$ , где  $R$  — радиус окружности.

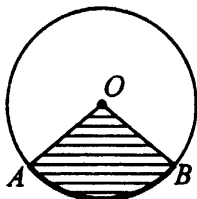


Рис. 205

### ☞ Задачи с решениями

6. В окружности с центром  $O$  (см. рис. 206) найдите градусную меру  $\angle ABC$ , если  $\angle AOC = 82^\circ$ .

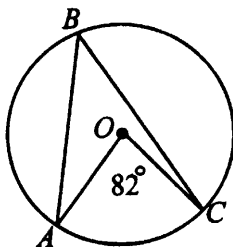


Рис. 206

*Решение.*

$\angle ABC$  вписанный,  $\angle AOC$  центральный, они опираются на дугу  $AC$ , поэтому  $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{82^\circ}{2} = 41^\circ$ .

*Ответ:* 41.

7. Найдите длину отрезка  $AC$  секущей, используя рисунок 207.  $O$  — центр окружности,  $B$  — точка касания.

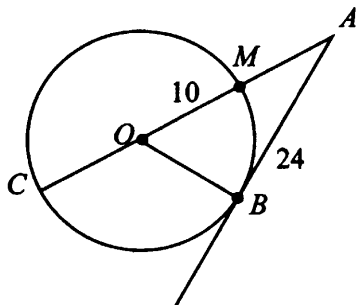


Рис. 207

*Решение.*

$OB = OC = OM = 10$  — радиусы окружности.  
 $AC = OA + OC$ . Найдём  $OA$  из прямоугольного  $\triangle OAB$  ( $OB \perp BA$  как радиус, проведённый в точку касания). По теореме Пифагора  $OB^2 + BA^2 = OA^2$ .

$OA = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$ . Тогда  $AC = 26 + 10 = 36$ .

*Ответ:* 36.

### Треугольник и окружность

В любой треугольник можно вписать окружность, которая будет касаться каждой из его сторон, т. е. иметь с ней одну общую точку. Такая окружность — единственная. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник (см. рис. 208).

Вокруг любого треугольника можно описать окружность, которая проходит через все его вершины. Такая окружность — единственная. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая яв-

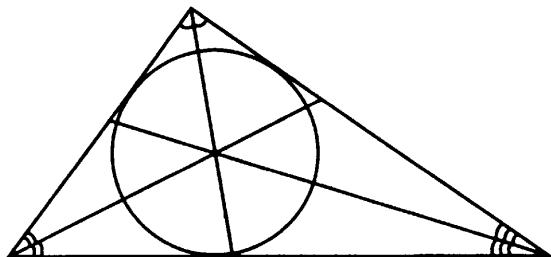


Рис. 208

ляется центром окружности, описанной около треугольника (см. рис. 209).

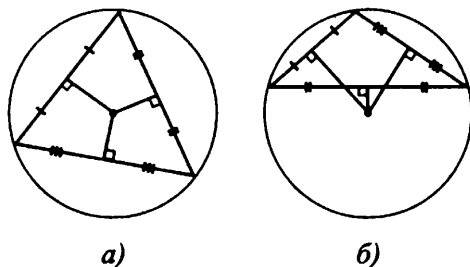


Рис. 209

Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности ( $S = p \cdot r$ ,

$$p = \frac{a + b + c}{2}).$$

Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности ( $S = \frac{abc}{4R}$ ).

Если треугольник  $ABC$  вписан в окружность и  $\angle C = 90^\circ$ , то  $AB$  — диаметр (см. рис. 210). В этом случае радиус описанной окружности равен половине гипотенузы.

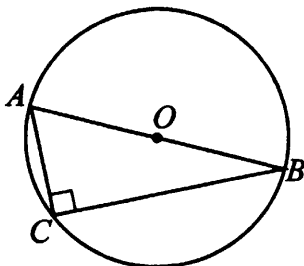


Рис. 210

Если в треугольнике один из углов опирается на диаметр описанной окружности, то этот угол — прямой.

### ☞ Задачи с решениями

8. На рисунке 211 окружность с центром  $O$  описана вокруг  $\triangle ABC$ . Найдите радиус окружности.

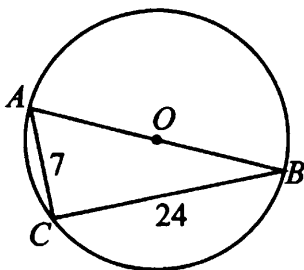


Рис. 211

*Решение.*

$\angle ACB$  опирается на диаметр. Значит,  $\angle ACB = 90^\circ$ , по теореме Пифагора  $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = 25$ ,

$$AO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5.$$

*Ответ:* 12,5.

9. В окружность вписан треугольник. Найдите градусную меру большей из дуг окружности, используя рисунок 212.

*Решение.*

$\triangle MPK$  вписанный, опирается на дугу  $MK$ .

$$\angle MPK = \frac{1}{2} \text{ дуга } MK, \text{ поэтому } \text{дуга } MK = 2 \cdot 80^\circ = 160^\circ.$$

$$\text{Аналогично } \text{дуга } MP = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ.$$

$$\text{дуга } PK = 360^\circ - 160^\circ - 70^\circ = 130^\circ.$$

Большая дуга равна  $160^\circ$ .

*Ответ:* 160.

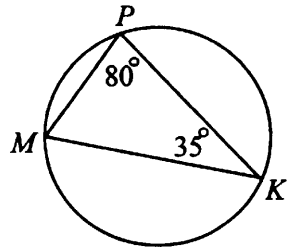


Рис. 212

### Четырёхугольник и окружность

Не во всякий четырёхугольник можно вписать окружность.

Не вокруг любого четырёхугольника можно описать окружность.

В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.  $AD + BC = AB + CD$  (см. рис. 213).

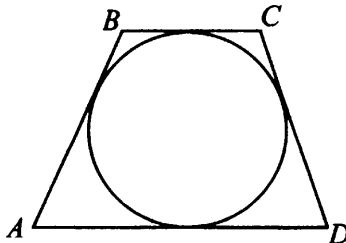


Рис. 213

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

В любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна  $180^\circ$ .

$\angle BCD + \angle BAD = \angle CBA + \angle CDA = 180^\circ$  (см. рис. 214).

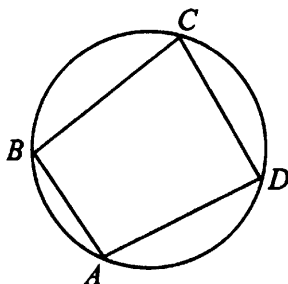


Рис. 214

Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна  $180^\circ$ , то около него можно описать окружность.

### Многоугольники и окружность

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, то есть построить такую окружность, которая касается всех сторон правильного многоугольника (имеет с каждой стороной ровно одну общую точку). В этом случае говорят, что многоугольник описан вокруг окружности.

Пример для пятиугольника приведён на рисунке 215.

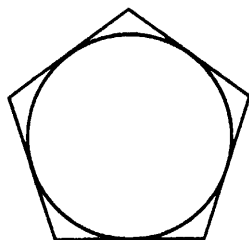


Рис. 215

Вокруг любого правильного многоугольника можно описать окружность. То есть построить такую окружность, которая проходит через все вершины правильного многоугольника



(см. рис. 216). В этом случае говорят, что многоугольник вписан в окружность.

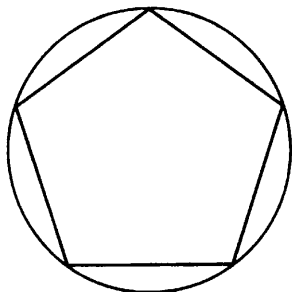


Рис. 216

### 8 — Задачи с решениями

10. Около четырёхугольника описана окружность (см. рис. 217). Найдите величину угла  $A$  этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

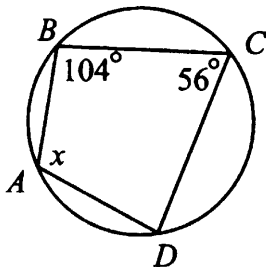


Рис. 217

*Решение.*

Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна  $180^\circ$ .

$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \angle A = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ.$$

*Ответ:* 124.

11. В четырёхугольник вписана окружность (см. рис. 218).  $AB = 10$ ,  $CD = 8$ ,  $BC = 5$ . Найдите  $AD$ .

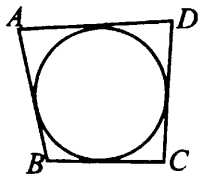


Рис. 218

*Решение.*

Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Значит,  $AB + CD = AD + BC$ , то есть  $10 + 8 = 5 + AD$ , откуда  $AD = 18 - 5 = 13$ .

*Ответ:* 13.

### ❓ Варианты для самостоятельного решения

#### Вариант 1

1. Найдите величину угла  $ACB$ , изображённого на рисунке 219. Ответ выразите в градусах.  $O$  — центр окружности.

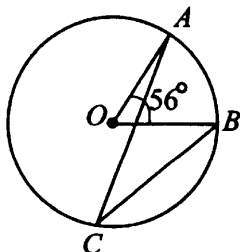


Рис. 219

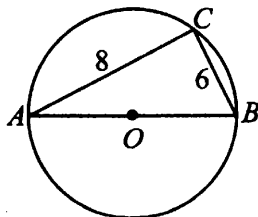


Рис. 220

2. Найдите радиус окружности с центром  $O$ , изображённой на рисунке 220.

3. Окружность вписана в четырёхугольник со сторонами 7, 9, 13,  $x$  (см. рис. 221). Найдите величину стороны  $x$ .

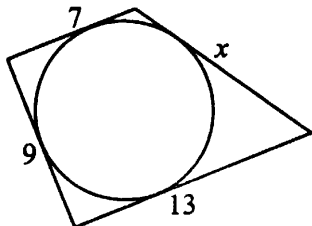


Рис. 221

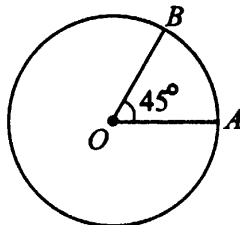


Рис. 222.

4. Найдите площадь  $S$  кругового сектора радиусом 1, образованного углом  $45^\circ$  (см. рис. 222). В ответе запишите  $\frac{S}{\pi}$ .

5. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник — квадрат.
- 2) Многоугольник считается описанным, если все его стороны касаются окружности.
- 3) В любом описанном четырёхугольнике противоположные стороны равны.
- 4) В любой треугольник можно вписать окружность.
- 5) Величина вписанного угла равна величине дуги окружности, на которую он опирается.

## Вариант 2

1. Найдите величину угла  $\alpha$ , изображённого на рисунке 223. Ответ выразите в градусах.  $O$  — центр окружности.

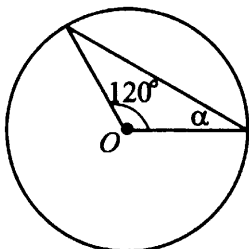


Рис. 223

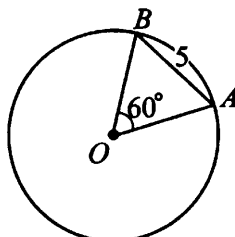


Рис. 224

2. Найдите радиус окружности с центром  $O$ , изображённой на рисунке 224.

3. Около четырёхугольника описана окружность (см. рис. 225). Найдите величину неизвестного угла этого четырёхугольника (в градусах).

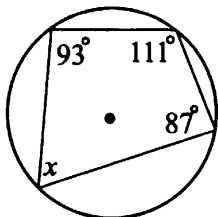


Рис. 225

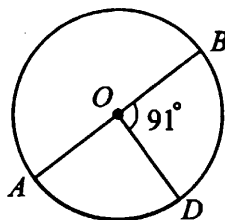


Рис. 226

4. Найдите величину дуги  $AD$  (в градусах), пользуясь рисунком 226.  $O$  — центр окружности.

5. Укажите номера неверных утверждений.

- 1) Около любого ромба можно описать окружность.
- 2) Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой.

- 3) Любой выпуклый многоугольник является правильным.  
 4) Центральный угол окружности равен градусной мере дуги, на которую он опирается.  
 5) Любой треугольник, имеющий вершину в центре окружности, является равнобедренным.

### Вариант 3

1. Найдите величину угла  $COB$ , используя рисунок 227. Ответ выразите в градусах.  $O$  — центр окружности.

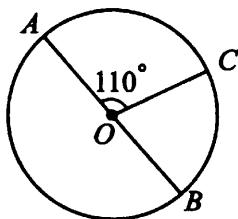


Рис. 227

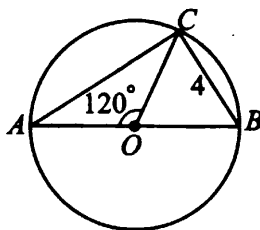


Рис. 228

2. Найдите радиус окружности с центром  $O$ , используя данные рисунка 228.

3. Окружность вписана в четырёхугольник  $ABCD$ . Используя данные рисунка 229, найдите длину стороны  $AD$ .

4. Найдите площадь  $S$  кругового сектора радиусом 2, занимающего четвертую часть круга. В ответ запишите  $\frac{S}{\pi}$ .

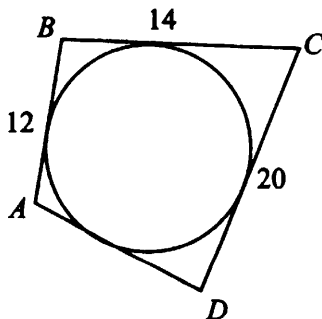


Рис. 229

5. Укажите номера верных утверждений.

- 1) В треугольник можно вписать только одну окружность.
- 2) Если в треугольнике, вписанном в окружность, бóльшая сторона является диаметром окружности, то этот треугольник — прямоугольный.
- 3) Любая хорда окружности меньше её радиуса.
- 4) Центральный угол в 4 раза больше вписанного.
- 5) В любой ромб можно вписать окружность.

#### Вариант 4

1. Найдите величину угла  $ABC$ , изображённого на рисунке 230. Ответ выразите в градусах.  $O$  — центр окружности.

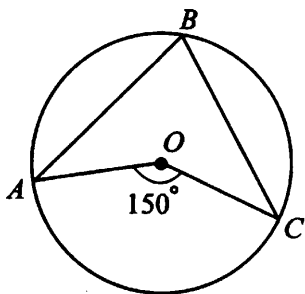


Рис. 230

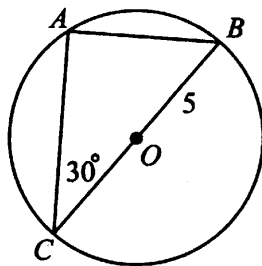


Рис. 231

2. Найдите длину хорды  $AB$  окружности, используя рисунок 231.  $O$  — центр окружности.

3. Четырёхугольник вписан в окружность, один из его углов равен  $65^\circ$ . Найдите величину угла, противоположного данному. Ответ выразите в градусах.

4. Найдите угловую величину дуги круга радиуса 10, соответствующей дуге сектора площадью  $65\pi$ . Ответ выразите в градусах.

5. Укажите номера неверных утверждений:

- 1) Вокруг параллелограмма всегда можно описать окружность.
- 2) Около любой трапеции можно описать окружность.
- 3) У любого выпуклого четырёхугольника, вписанного в окружность, суммы длин противоположных сторон равны.
- 4) Площадь кругового сектора равна  $\frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$ , где  $R$  — радиус круга,  $\alpha$  — величина дуги сектора.
- 5) Вписанный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается.

### Вариант 5

1. Найдите длину отрезка  $AD$  секущей, используя рисунок 232.  $O$  — центр окружности.

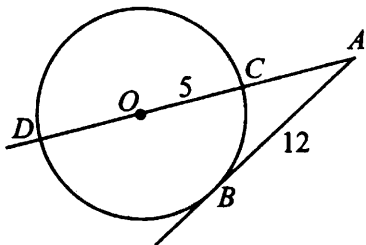


Рис. 232

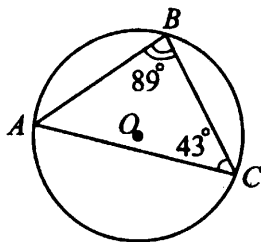


Рис. 233

2. В окружность вписан треугольник, вершины которого делят окружность на три дуги. Найдите величину меньшей из дуг окружности, используя рисунок 233. Ответ выразите в градусах.

3. Окружность вписана в четырёхугольник со сторонами 15,  $x$ , 14, 19 (см. рис. 234). Найдите величину стороны  $x$ .

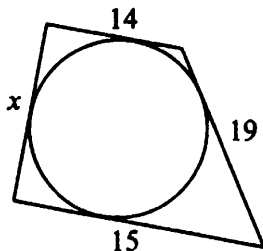


Рис. 234

4. Найдите площадь  $S$  кругового сектора радиусом 3, если сектор занимает двенадцатую часть круга. В ответе запишите

$$\frac{S}{\pi}.$$

5. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Радиус окружности равен половине гипотенузы прямоугольного треугольника, вписанного в эту окружность.
- 2) Суммы противоположных углов вписанного в окружность четырёхугольника равны.
- 3) Около любого параллелограмма можно описать окружность.
- 4) Центральный угол равен половине дуги, на которую он опирается.
- 5) Прямая и окружность могут иметь три общие точки.

### Вариант 6

1. Найдите величину угла  $ABC$ , используя рисунок 235. Ответ выразите в градусах.  $O$  — центр окружности.



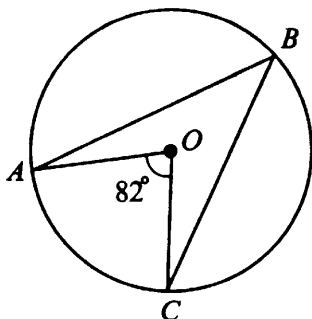


Рис. 235

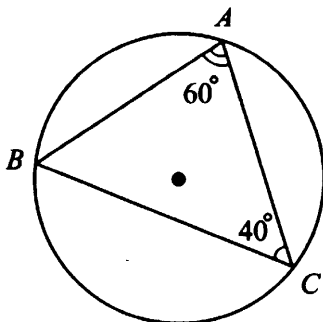


Рис. 236

2. В окружность вписан треугольник, его вершины разбивают окружность на несколько дуг. Найдите градусную меру большей из них, используя рисунок 236. Ответ выразите в градусах.

3. Окружность описана около четырёхугольника, один из углов которого равен  $93^\circ$ . Найдите величину угла, противоположного данному. Ответ выразите в градусах.

4. Площадь круга равна  $12\pi$ . Найдите площадь сектора, если величина дуги сектора составляет  $120^\circ$ .

5. Укажите номера неверных утверждений.

1) Около треугольника можно описать окружность и при том только одну.

2) Если вписанный угол опирается на диаметр окружности, то этот угол прямой.

3) Вписанный угол равен градусной мере дуги, на которую опирается.

4) Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника является центром вписанной окружности.

5) Длина окружности радиусом  $R$  равна  $2\pi R$ .

## Глава 9. Векторы и координаты

### Векторы

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом, называется вектором.

Точка плоскости называется нулевым вектором.

Длиной или модулем вектора  $\overrightarrow{AB}$  называется длина отрезка  $AB$ . Длина вектора обозначается  $|\overrightarrow{AB}|$ .

Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Коллинеарные векторы бывают **сонаправленными** ( $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ) (см. рис. 237) и **противоположно направленными** ( $\vec{p} \updownarrow \vec{d}$ ) (см. рис. 238).

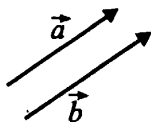


Рис. 237

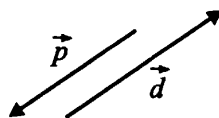


Рис. 238

### Сумма и разность векторов

1.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
2.  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
3.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

На рисунке 239 показано, как построить сумму и разность векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

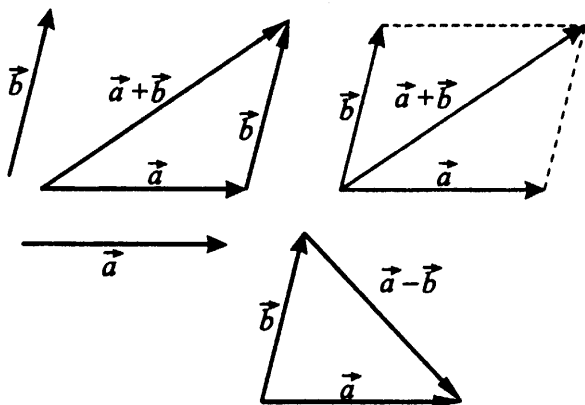


Рис. 239

4. Умножение вектора на число.

$k \cdot \vec{a}$  — такой вектор, длина которого равна  $|k| \cdot |\vec{a}|$  и который при  $k > 0$  сонаправлен с  $\vec{a}$ , при  $k < 0$  противоположно направлен  $\vec{a}$  (см. рис. 240).

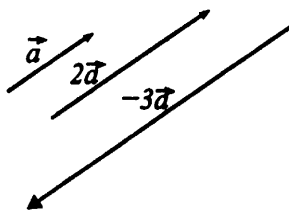


Рис. 240

5. Если  $M$  — середина  $AB$ , то  $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$ .

**Скалярное произведение векторов и его свойства**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (см. рис. 241).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

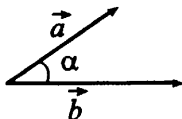


Рис. 241

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| \geq |\vec{a}| - |\vec{b}|$$

### Координаты вектора

Чтобы найти **координаты вектора**, нужно из координат конца вектора вычесть координаты начала. Если точки  $A$  и  $B$  заданы координатами  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$ , то координаты вектора  $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ .

**Длина отрезка**  $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ . Например, на рисунке 242 координаты точек  $A(5; 1)$ ,  $B(1; 3)$ .

Координаты вектора  $\overrightarrow{AB}\{1 - 5; 3 - 1\}$ , то есть  $\overrightarrow{AB}\{-4; 2\}$ .

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

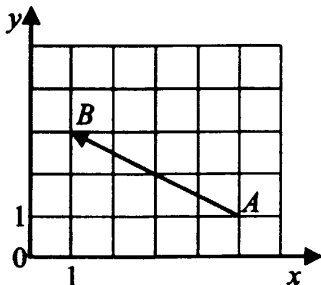


Рис. 242

**Координаты середины отрезка** следует находить по формулам  $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ;  $y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

Например, на рисунке 242 координаты середины отрезка  $AB$  равны  $x = \frac{1+5}{2} = 3$ ;  $y = \frac{1+3}{2} = 2$ .

Если  $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ ,  $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ , то

1. вектор  $\vec{a} + \vec{b}$  имеет координаты  $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$ ;
2. вектор  $\vec{a} - \vec{b}$  имеет координаты  $\{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$ ;
3. вектор  $k\vec{a}$  имеет координаты  $\{kx_1; ky_1\}$ ;
4.  $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ;
5.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ .

### 🔗 Задачи с решениями

6. Найдите координаты векторов  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $5\vec{a}$ , если известно, что  $\vec{a}\{2; -3\}$ ,  $\vec{b}\{-5; -2\}$ .

*Решение.*

$$\vec{a} + \vec{b} = \{2 + (-5); -3 + (-2)\} = \{-3; -5\}.$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{2 - (-5); -3 - (-2)\} = \{7; -1\}.$$

$$5\vec{a} = \{5 \cdot 2; 5 \cdot (-3)\} = \{10; -15\}.$$

*Ответ:*  $\{-3; -5\}$ ,  $\{7; -1\}$ ,  $\{10; -15\}$ .

7. Найдите скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{AB}\{3; 8\}$  и  $\overrightarrow{MN}\{-2; 3\}$ .

*Решение.*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = x_{\overrightarrow{AB}} \cdot x_{\overrightarrow{MN}} + y_{\overrightarrow{AB}} \cdot y_{\overrightarrow{MN}} = 3 \cdot (-2) + 8 \cdot 3 = 18.$$

*Ответ:* 18.

8. Длина вектора  $\vec{a}$  равна 4, длина вектора  $\vec{b}$  равна 10, а длина вектора  $\vec{c}$  равна 5. Найдите  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  и  $\vec{a} \cdot \vec{c}$ , если известно, что угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $120^\circ$ , а векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$  сонаправлены.

*Решение.*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}, \vec{b}}.$$

$$\text{Тогда } \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ = 40 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -20.$$

По условию  $\vec{a} \parallel \vec{c}$ , значит, между ними угол  $0^\circ$ , то есть  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 4 \cdot 5 \cdot 1 = 20$ .

*Ответ:*  $-20; 20$ .

9. Длина вектора  $\vec{m}$  равна 12, длина вектора  $\vec{k}$  равна 5. Найдите длину вектора  $\vec{m} - \vec{k}$ , если вектор  $\vec{m}$  перпендикулярен вектору  $\vec{k}$ .

*Решение.*

Построим рисунок 243.

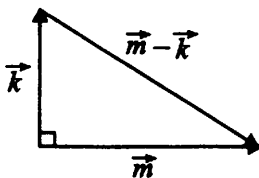


Рис. 243

$\vec{m} \perp \vec{k}$ , поэтому  $|\vec{m} - \vec{k}|$  можно найти как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 5 и 12.  $|\vec{m} - \vec{k}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ .

*Ответ:* 13.

10. Найдите отрицательную координату  $y$ , если расстояние от точки  $M(1; y)$  до точки  $K(4; -3)$  равно 5.

*Решение.*

Запишем расстояние от  $M$  до  $K$ :

$$MK = \sqrt{(4-1)^2 + (-3-y)^2} = 5. \text{ Тогда } 3^2 + (3+y)^2 = 25,$$

$$(3+y)^2 = 16, \quad \begin{cases} 3+y = 4, \\ 3+y = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1, \\ y = -7. \end{cases}$$

Выберем отрицательную координату  $y = -7$ .

*Ответ:*  $-7$ .

## Задачи для самостоятельного решения

### Вариант 1

1. Длина вектора  $\vec{a}$  равна 3, а длина вектора  $\vec{b}$  равна 4. Найдите длину вектора  $\vec{a} + \vec{b}$ , если вектор  $\vec{a}$  перпендикулярен вектору  $\vec{b}$ .
2. Найдите координаты вектора  $\vec{a} - \vec{b}$ , если  $\vec{a}\{-3; 2\}$ ,  $\vec{b}\{2; 1\}$ .
3. Укажите номера верных утверждений.
  - 1) Координаты равных векторов соответственно равны.
  - 2) Для трёх точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  выполняется равенство  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .
  - 3) Длина вектора вычисляется по формуле  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , где  $\vec{a}\{x; y\}$ .
  - 4) От любой точки можно отложить бесчисленное множество векторов, равных данному.
  - 5) Векторы равны, если они сонаправлены.

**Вариант 2**

1. Длина вектора  $\vec{a}$  равна 6, а длина вектора  $\vec{b}$  равна 8. Найдите длину вектора  $\vec{a} + \vec{b}$ , если вектор  $\vec{a}$  перпендикулярен вектору  $\vec{b}$ .
2. Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если координаты его начала и конца  $A(5; 7)$ ,  $B(-3; 4)$ .
3. Укажите номера неверных утверждений.
  - 1) Длина вектора равна сумме квадратов его координат.
  - 2) Если  $M$  — точка пересечения диагоналей ромба  $ABCD$ , то  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$ .
  - 3) Координаты вектора равны координатам его начала.
  - 4) Неравенство треугольника выражается формулой  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .
  - 5) Единичный вектор имеет длину 0.

**Вариант 3**

1. Найдите длину вектора  $\vec{a}$ , если  $\vec{a} \in \{-3; 4\}$ .
2. Найдите координату  $x$ , если расстояние от точки  $A(2; 3)$  до точки  $B(x; 1)$  равно 2.
3. Укажите номера верных утверждений.
  - 1) Вектор — это направленный отрезок.
  - 2) Два вектора равны, если равны их длины.
  - 3) Сонаправленные векторы являются коллинеарными.
  - 4) Длина вектора равна значению квадратного корня из суммы квадратов его координат.
  - 5) Вектор  $4\vec{b}$  не сонаправлен вектору  $\vec{b}$ .



**Вариант 4**

1. Найдите длину вектора  $\vec{a}$ , если  $\vec{a} \{ -12; 5 \}$ .
2. Найдите координату  $x$ , если расстояние от точки  $A(-1; x)$  до точки  $B(6; 3)$  равно 7.
3. Укажите номера неверных утверждений.
  - 1) Вектор  $\vec{a}$  сонаправлен вектору  $3\vec{a}$ .
  - 2) Для любого вектора  $\vec{a}$  справедливо  $(-1) \cdot \vec{a} = \vec{a}$ .
  - 3) Не от любой точки можно отложить вектор, равный данному.
  - 4) Координаты середины отрезка  $AB$  равны полусумме соответствующих координат точек  $A$  и  $B$ .
  - 5) Векторы равны, если они сонаправлены и длины их равны.

**Вариант 5**

1. Дан вектор  $\vec{a} \{ 3; -2 \}$ . Найдите координаты вектора  $3\vec{a}$ .
2. Заданы точки  $A(-1; 3)$ ,  $B(2; -4)$ . Найдите координаты вектора  $\vec{a} = -\overrightarrow{AB}$ .
3. Укажите номера верных утверждений.
  - 1) Вектор разности векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — это вектор суммы вектора  $\vec{a}$  и вектора, противоположного вектору  $\vec{b}$ .
  - 2) Длина вектора вычисляется по формуле  $|\vec{a}| = x^2 + y^2$ , где  $\vec{a} \{ x; y \}$ .
  - 3) Векторы равны, если они имеют одинаковые координаты.
  - 4) Координаты вектора равны координатам его конца.
  - 5) Вектор  $\vec{a}$  сонаправлен вектору  $5\vec{a}$ .

**Вариант 6**

1. Найдите координаты вектора  $\vec{b} - \vec{a}$ , если  $\vec{a}\{5; -3\}$ ,  $\vec{b}\{7; 4\}$ .
2. Найдите координаты вектора  $2\vec{AB}$ , если  $A(4; -2)$ ,  $B(3; -1)$ .
3. Укажите номера верных утверждений.
  - 1) Нулевой вектор имеет длину, равную единице.
  - 2) Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.
  - 3) Если вектор  $\vec{b}$  имеет координаты  $x$  и  $y$ , тогда вектор  $-\vec{b}$  имеет координаты  $-x$  и  $-y$ .
  - 4) Если у векторов одинаковое начало, то они имеют равные длины.
  - 5) Любой вектор можно задать его координатами.

# Тренировочные тесты к модулю 2 «Геометрия»

## Вариант 1

1. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$   $\angle BAC = 37^\circ$  (см. рис. 244). В равнобедренном треугольнике с основанием  $KC$  найдите величину угла  $CDK$  в градусах.

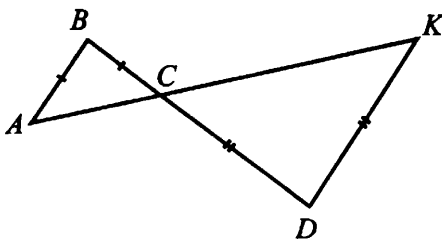


Рис. 244

2. Из одной вершины на две стороны параллелограмма опустили высоты, длины которых равны 2 и 3,2. Длина большей стороны параллелограмма равна 4. Найдите длину другой стороны.

3. Длина вектора  $\overrightarrow{ML}$  равна 2, длина вектора  $\overrightarrow{MN}$  равна 4. Косинус угла между ними равен  $-0,5$ . Найдите скалярное произведение  $\overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{MN}$  (см. рис. 245).

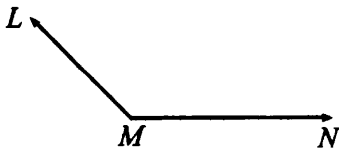


Рис. 245

4. В трапеции  $ABCD$   $\angle A = 70^\circ$ ,  $\angle C = 30^\circ$ . Найдите наименьший из углов  $B$  и  $D$ . В ответе укажите его градусную меру.

5. Найдите расстояние между точками  $A$  и  $G$  (см. рис. 246).

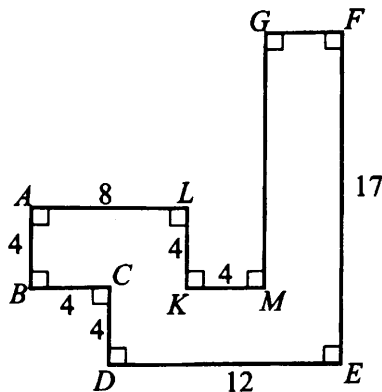


Рис. 246

6. В трапеции  $AB = BC = CD$ ,  $AD = 2BC$  (см. рис. 247). Найдите угол, под которым пересекаются прямые, содержащие боковые стороны  $AB$  и  $CD$ . Ответ укажите в градусах.

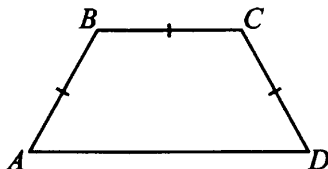


Рис. 247

7. Найдите периметр трапеции, изображённой на рисунке 248.

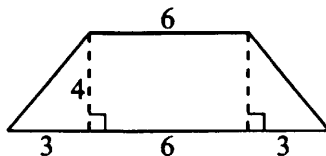


Рис. 248

8. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Точка пересечения биссектрис треугольника — центр окружности, описанной около него.
- 2) Сумма углов треугольника —  $360^\circ$ .
- 3) Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.
- 4) Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
- 5) Сумма углов трапеции —  $360^\circ$ .

### Вариант 2

1. В равнобедренном треугольнике  $KLM$  с основанием  $KM$  угол при вершине  $K$  равен  $50^\circ$ ,  $LN$  — медиана. Найдите величину угла  $NLM$ . Ответ дайте в градусах.

2. В трапеции  $ABCD$   $\angle D = 30^\circ$ ,  $AD = 10$ ,  $AB = 4$ ,  $DC = 12$  (см. рис. 249). Найдите площадь трапеции  $ABCD$ .

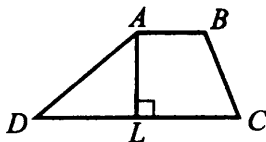


Рис. 249

3. Длина вектора  $\overrightarrow{AB}$  равна 4, длина вектора  $\overrightarrow{AD}$  равна 6. Косинус угла между этими векторами равен  $-\frac{1}{6}$  (см. рис. 250).

Найдите скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ .

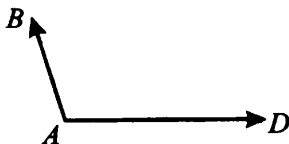


Рис. 250

4. Известно, что  $a \parallel b \parallel c$ ,  $d \parallel l$ ,  $\angle \alpha = 130^\circ$  (см. рис. 251).  
Найдите  $\angle \beta$  (в градусах).

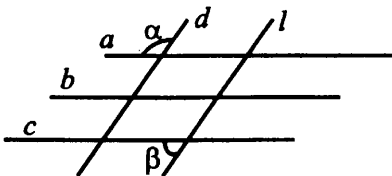


Рис. 251

5. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 252.

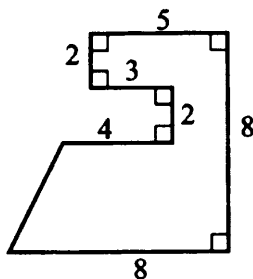


Рис. 252

6. Две окружности с радиусами 8 и 2 касаются внешним образом. Найдите  $AB$  — отрезок на их общей внешней касательной, заключённый между точками касания (см. рис. 253).

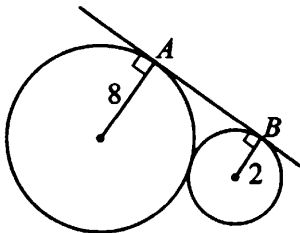


Рис. 253

7. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 254.

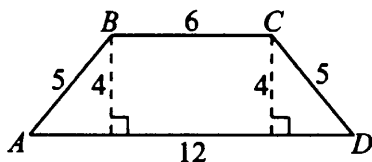


Рис. 254

8. Укажите номера неверных утверждений.

- 1) Внешний угол треугольника равен сумме двух углов, не смежных с ним.
- 2) Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность.
- 3) Через любые четыре точки можно провести окружность.
- 4) При пересечении параллельных прямых секущей односторонние углы равны.
- 5) Градусная мера вписанного угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается.

### Вариант 3

1. В равнобедренной трапеции  $ABCD$  выполняется  $\angle A + \angle B = 80^\circ$ . Найдите градусную меру  $\angle D$ .

2. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 255.

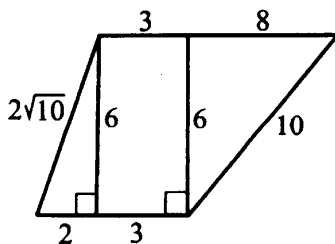


Рис. 255

3. Найдите сумму углов правильного 17-ти угольника. Ответ укажите в градусах.

4. Найдите  $S_{ABCDE}$  (см. рис. 256).

5. Про векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  известно, что  $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{c}$ ,  $\vec{b} \parallel \vec{a}$ ,  $|\vec{a}| = 7$ ,  $|\vec{b}| = 11$ ,  $|\vec{c}| = 5$ . Найдите длину вектора  $\vec{a} + \vec{b}$ .

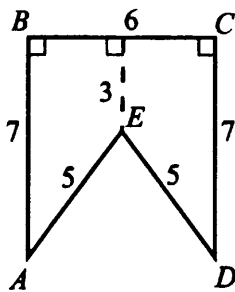


Рис. 256

6. Две касательные к окружности пересекаются под углом  $60^\circ$ .  $A$  и  $B$  — точки касания,  $O$  — центр окружности (см. рис. 257). Найдите угол  $AOB$ . Ответ укажите в градусах.

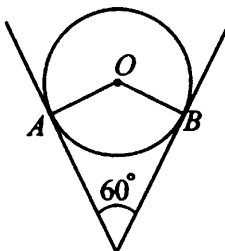


Рис. 257

7. Найдите периметр параллелограмма  $ABCD$ , изображённого на рисунке 258.

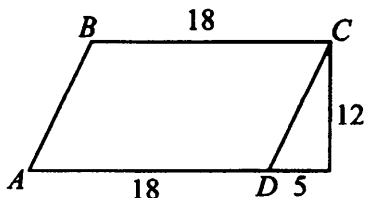


Рис. 258



8. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Если две прямые перпендикулярны одной и той же прямой, то они не пересекаются.
- 2) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна сумме катетов.
- 3) Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.
- 4) Катет, лежащий против угла в  $60^\circ$ , равен половине гипотенузы.
- 5) Площадь треугольника равна произведению двух его сторон на синус угла между ними.

#### Вариант 4

1. Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в окружность (см. рис. 259),  $\angle B + \angle E = 200^\circ$ . Найдите меньшую дугу  $CD$ . Ответ укажите в градусах.

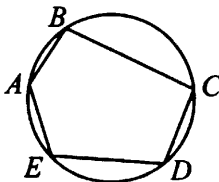


Рис. 259

2. Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ .  $S_{AOB} = 9$ . Найдите площадь параллелограмма  $ABCD$ .

3. Про векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  известно, что  $|\vec{a}| = 3$ ,  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ,  $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{c}$ .

4. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность,  $\angle A = 108^\circ$ ,  $\angle B = 70^\circ$  (см. рис. 260). Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ укажите в градусах.

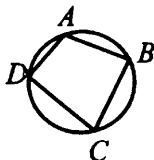


Рис. 260

5. В параллелограмме  $ABCD$  с периметром 24 диагональ  $AC$  является биссектрисой тупых углов (см. рис. 261). Найдите  $AB$ .

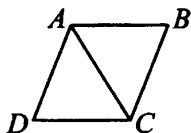


Рис. 261

6. В треугольнике  $ABC$   $AB = BC = 5$ ,  $AC = 6$ . В него вписана окружность с центром в точке  $O$ . Найдите площадь треугольника  $AOC$ .

7. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке 262.

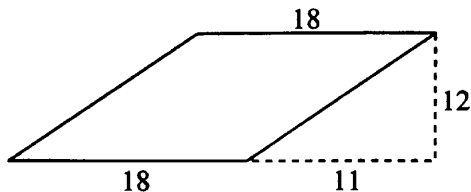


Рис. 262

8. Укажите номера неверных утверждений.

- 1) В любую окружность можно вписать треугольник.
- 2) В любой квадрат можно вписать окружность.
- 3) Вокруг любого четырёхугольника можно описать окружность.
- 4) Биссектрисы углов треугольника делят каждый из его углов на 3 равные части.
- 5) Сумма углов правильного 5-угольника равна  $540^\circ$ .

### Вариант 5

1. Диагонали равнобедренной трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$  (см. рис. 263). Найдите угол  $DBC$ , если угол  $AOD$  равен  $130^\circ$ . Ответ дайте в градусах.

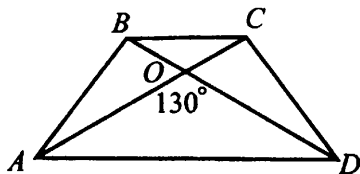


Рис. 263

2. Площадь треугольника  $ABC$ , изображённого на рисунке 264, равна 30. Найдите длину отрезка  $HC$ , если  $BH = 5$  и  $AH = 5$ .

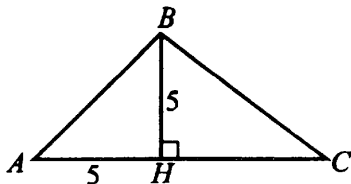


Рис. 264

3. В равностороннем треугольнике  $ABC$  точка  $O$  — точка пересечения высот, проведённых из вершин к основаниям. Определите меньший угол между высотами треугольника (в градусах).

4. В трапеции  $ABCD$  сторона  $AD = 20$ , а сторона  $AB = 15$ . Определите площадь трапеции, если  $\angle BCD = 45^\circ$ , а  $\angle BAD = 90^\circ$  (см. рис. 265).

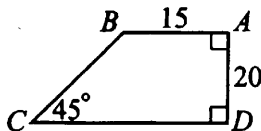


Рис. 265

5. Длины векторов  $\vec{AJ}$  и  $\vec{AG}$  равны 2 и 4 соответственно. Угол между векторами равен  $120^\circ$ . Найдите квадрат длины вектора  $\vec{AJ} + \vec{AG}$ .

6. Известно, что  $ABCD$  — выпуклый четырёхугольник,  $\angle BAD = 100^\circ$ ,  $\angle BCD = 70^\circ$ ,  $BD = BC$ ,  $AB = AD$  (см. рис. 266). Найдите  $\angle ABC$ . Ответ укажите в градусах.

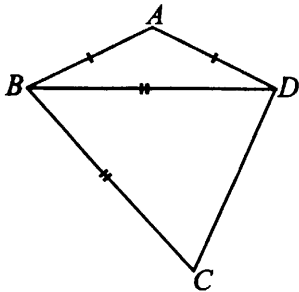


Рис. 266

7. Найдите площадь ромба, изображённого на рисунке 267.

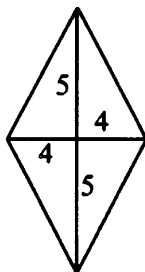


Рис. 267

8. Укажите номера неверных утверждений.

- 1) Длина средней линии трапеции равна сумме её оснований.
- 2) Прямая является касательной к окружности, если пересекает её в двух точках.
- 3) Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, проведённую к этому основанию.
- 4) Биссектриса угла треугольника перпендикулярна стороне, противолежащей этому углу.
- 5) Площадь треугольника равна половине произведения периметра на радиус описанной окружности.

### Вариант 6

1. В равнобедренном прямоугольном треугольнике  $ABC$  точка  $O$  — точка пересечения биссектрис прямого и острого углов. Определите меньший угол между этими биссектрисами. Ответ дайте в градусах.

2. В трапеции  $ABCD$  сторона  $AD = 30$ , а сторона  $AB = 15$ . Определите площадь трапеции, если  $\angle BCA = 45^\circ$ , а  $\angle BAD = 90^\circ$  (см. рис. 268).

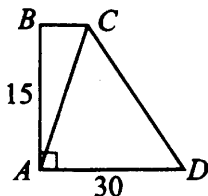


Рис. 268

3. Длины векторов  $\vec{AJ}$  и  $\vec{AG}$  равны 2 и 4 соответственно. Угол между векторами равен  $120^\circ$ . Найдите квадрат длины вектора  $\vec{AJ} - \vec{AG}$ .

4. Найдите угол  $ABC$  ромба  $ABCD$ , если угол  $ACD$  равен  $20^\circ$  (см. рис. 269). Ответ дайте в градусах.

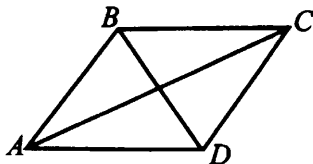


Рис. 269

5. Площадь параллелограмма  $ABCD$ , изображённого на рисунке 270, равна 18. Найдите длину отрезка  $AH$ , если  $BH = 3$  и  $HD = 4$ .

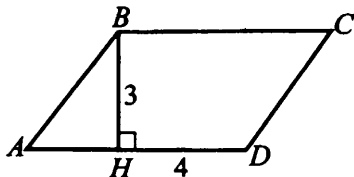


Рис. 270

6. Найдите сторону  $BC$  треугольника  $ABC$ , если  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AC = 24$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ .

7. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рис. 271). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

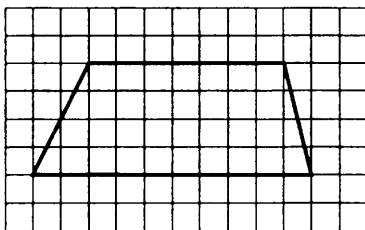


Рис. 271

8. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Ромб — это четырёхугольник, у которого все углы прямые.
- 2) Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна  $180^\circ$ .
- 3) В прямоугольном треугольнике гипотенуза меньше катета.
- 4) Если углы равны, то они вертикальные.
- 5) Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

### Вариант 7

1. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  (см. рис. 272),  $\angle C = 53^\circ$ . Найдите величину угла  $CBD$  (в градусах).

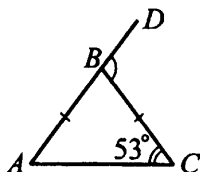


Рис. 272

2. Найдите периметр квадрата, диагональ которого равна  $5\sqrt{2}$ .

3. Дана равнобедренная трапеция со сторонами основания 12 и 6. Высота равна 4 (см. рис. 273). Найдите площадь трапеции.

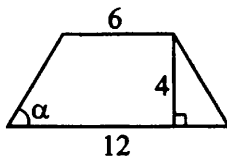


Рис. 273

4. Сторона ромба равна 8. Радиус окружности, вписанной в этот ромб, равен 2. Найдите площадь ромба.

5. В прямоугольный равнобедренный треугольник  $ABC$  вписан квадрат  $KFLD$ , как показано на рисунке 274. Сторона квадрата равна 3. Вектор  $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ . Найдите длину отрезка  $CF$ .

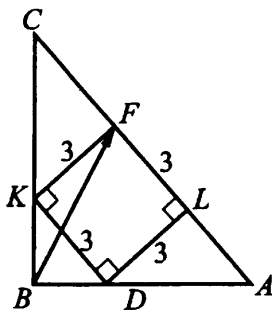


Рис. 274

6. Найдите катет  $BC$  треугольника  $ABC$ , если  $\operatorname{tg} \angle A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , гипотенуза  $AB = 10$ .



7. Найдите площадь равнобедренной трапеции, изображённой на рисунке 275.

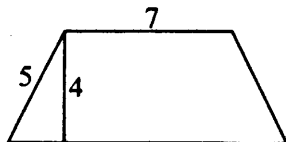


Рис. 275

8. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия.
- 2) В равнобедренной трапеции диагонали не равны.
- 3) Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна  $360^\circ$ .
- 4) Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в  $30^\circ$ , равен гипотенузе.
- 5) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

### Вариант 8

1. Внутренние углы треугольника относятся как  $2 : 3 : 5$ . Найдите наибольший внутренний угол, ответ выразите в градусах.

2. Дана трапеция  $ABCD$  (см. рис. 276).  $EBCF$  — квадрат, вписанный в трапецию со стороной  $BC = 2$ .  $AE = 1$ ,  $FD = 3$ . Продолжения боковых сторон трапеции  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $G$ . Найдите высоту  $GK$  треугольника  $AGD$ .

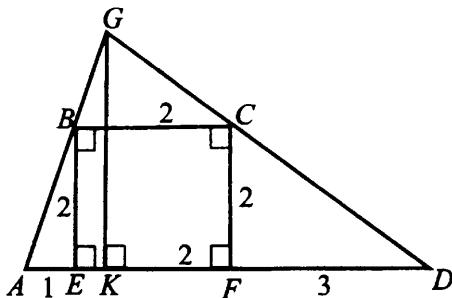


Рис. 276

3. Дана равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями 6 и 18 и боковой стороной  $AB = 10$ . Высота трапеции равна 8 (см. рис. 277). Найдите длину вектора  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ .

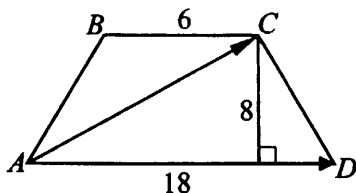


Рис. 277

4. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  (см. рис. 278),  $\angle BAE = 140^\circ$ . Найдите величину угла  $CBD$  (в градусах).

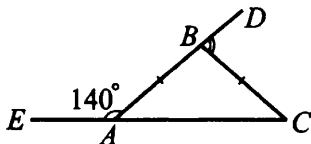


Рис. 278

5. Найдите площадь квадрата, диагональ которого равна 3.

6. Найдите катет  $AC$  треугольника  $ABC$ , если  $\cos \angle A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $AB = 6\sqrt{3}$ .

7. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$  (см. рис. 279). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

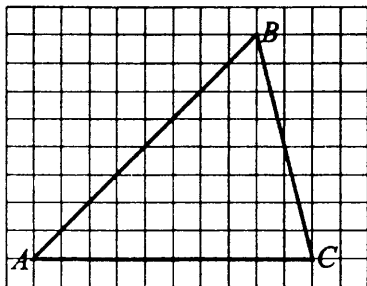


Рис. 279

8. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Высота, проведённая из вершины прямого угла треугольника, есть среднее арифметическое катетов.
- 2) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
- 3) Сумма углов треугольника меньше  $180^\circ$ .
- 4) Синус угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к гипотенузе.
- 5) Вписанный угол окружности равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

### Вариант 9

1. В равнобедренной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  диагональ  $AC$  является биссектрисой угла  $BAD$ . Найдите величину угла  $ACD$  в градусах, если известно, что  $\angle ADC = 50^\circ$ .

2. Найдите угол  $BAC$  (в градусах), если  $\angle BOC = 78^\circ$  и точка  $O$  — центр окружности (см. рис. 280).

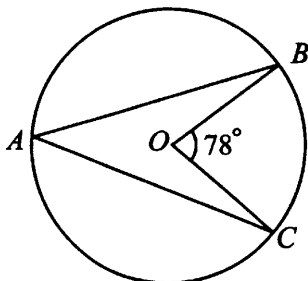


Рис. 280

3. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен  $150^\circ$ . Боковая сторона треугольника равна 120 (см. рис. 281). Найдите площадь этого треугольника.

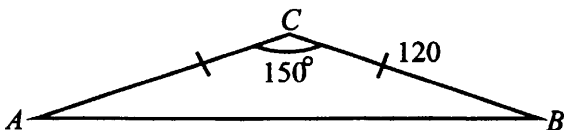


Рис. 281

4. Прямые  $AB$  и  $AC$  касаются окружности с центром в точке  $O$  в точках  $B$  и  $C$ . Найдите градусную меру угла  $BOC$ , если  $\angle BAO = 35^\circ$  (см. рис. 282).

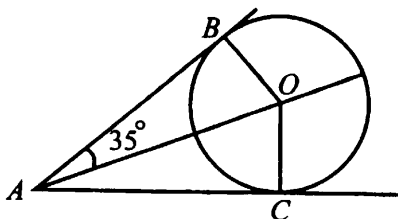


Рис. 282

5. Диагонали ромба  $ABCD$  равны 12 и 16. Найдите длину вектора  $\vec{AD} - \vec{AC}$  (см. рис. 283).

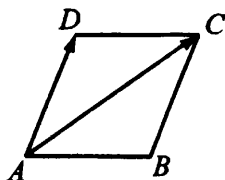


Рис. 283

6. Найдите гипотенузу  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$ , если  $\sin \angle A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $BC = 4\sqrt{2}$ .

7. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$  (см. рис. 284). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

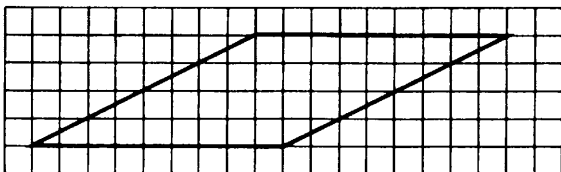


Рис. 284

8. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Медианы треугольника точкой пересечения делятся пополам.
- 2) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
- 3) Центр описанной около треугольника окружности лежит в точке пересечения биссектрис треугольника.
- 4) Периметр параллелограмма равен удвоенной сумме двух смежных сторон.
- 5) Площадь треугольника равна произведению основания на проведённую к нему высоту.

## Вариант 10

1. Площадь параллелограмма равна 120, две его стороны равны 15 и 40 (см. рис. 285). Найдите бóльшую высоту этого параллелограмма.

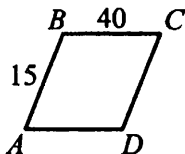


Рис. 285

2. Прямая  $AB$  касается окружности с центром  $O$  в точке  $B$ ,  $BC$  — биссектриса  $\angle ABO$  (см. рис. 286). Найдите градусную меру угла  $OBC$ .

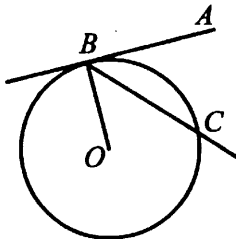


Рис. 286

3. Диагонали ромба  $MPKT$  пересекаются в точке  $O$  и равны 14 и 48 (см. рис. 287). Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{MO}$  и  $\vec{TO}$ .

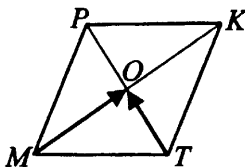


Рис. 287

4. В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  диагональ  $AC$  является биссектрисой угла  $BCD$ . Найдите величину угла  $CDA$  в градусах, если известно, что  $\angle CAD = 40^\circ$ .

5. В окружности с центром  $O$  найдите градусную меру угла  $AOC$ , если  $\angle ABC = 64^\circ$  (см. рис. 288).

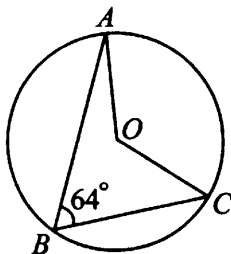


Рис. 288

6. Найдите сторону  $AB$  треугольника  $ABC$ , если  $\angle ADC = 60^\circ$ ,  $AC = 12$ ,  $\angle DAC = 90^\circ$  (см. рис. 289).

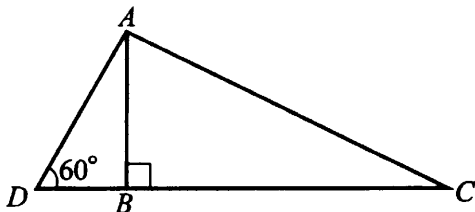


Рис. 289

7. Найдите площадь трапеции  $ABCD$  на рисунке 290.

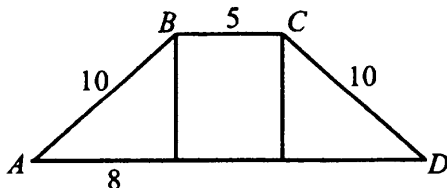


Рис. 290

8. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Параллелограмм — это четырёхугольник, у которого стороны попарно параллельны.
- 2) В прямоугольнике все углы равны  $80^\circ$ .
- 3) Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.
- 4) Градусная мера вписанного угла окружности равна градусной мере дуги, на которую он опирается.
- 5) Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник — равнобедренный.



# **Модуль 3.**

## **Реальная математика**

## Глава 10. Графическое и табличное представление информации

### ① Немного полезной информации

График характеризует изменение некоторой величины (температуры, количества осадков, стоимости акций и т.п.) в зависимости от другой (например, времени). В простейших задачах с графиком нужно, как правило, найти

- наибольшее или наименьшее значение этой величины;
- разность между наибольшим и наименьшим её значениями;
- момент времени, когда величина примет какое-либо значение;
- ответ на другой, подобный этим, вопрос.

Главное при решении подобной задачи — внимательно прочитать условие и вопрос. При поиске ответа на этот вопрос надо прямо на графике провести недостающие линии, при необходимости дописать пропущенные числа (это касается «разметки» осей).

Иногда в этих заданиях употребляются фразы, обозначающие подобные вещи, например: «На рисунке показано изменение дневной температуры воздуха **на протяжении первых трёх недель мая**» или «На рисунке показано изменение температуры воздуха **на протяжении первой и второй декад мая**». Декада — это 10 дней. Напомним значения ещё некоторых слов.

Полдень — 12.00, полночь — 24.00 или 00.00. Квартал — 3 месяца.

### 8 — Задачи с решениями

Попробуем по одному и тому же графику решить несколько задач.

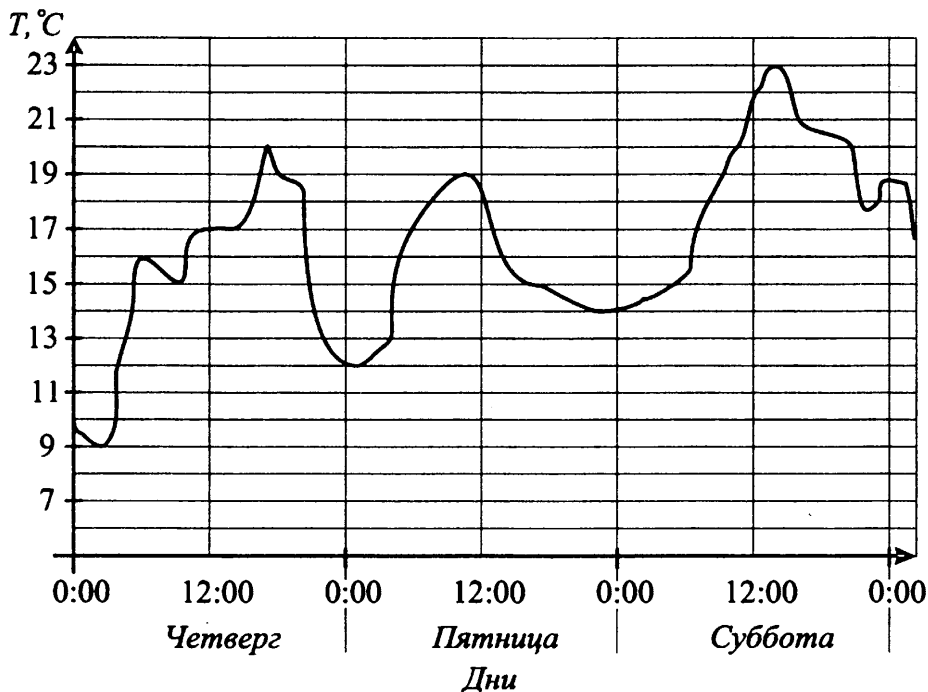


Рис. 291

1. На графике (см. рис. 291) показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток, начиная с 0 часов четверга. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия.

а) Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь с пятницы на субботу (ночь длится с 18.00 до 6.00). Ответ дайте в градусах Цельсия.

б) Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры воздуха в четверг. Ответ дайте в градусах Цельсия.

*Решение.*

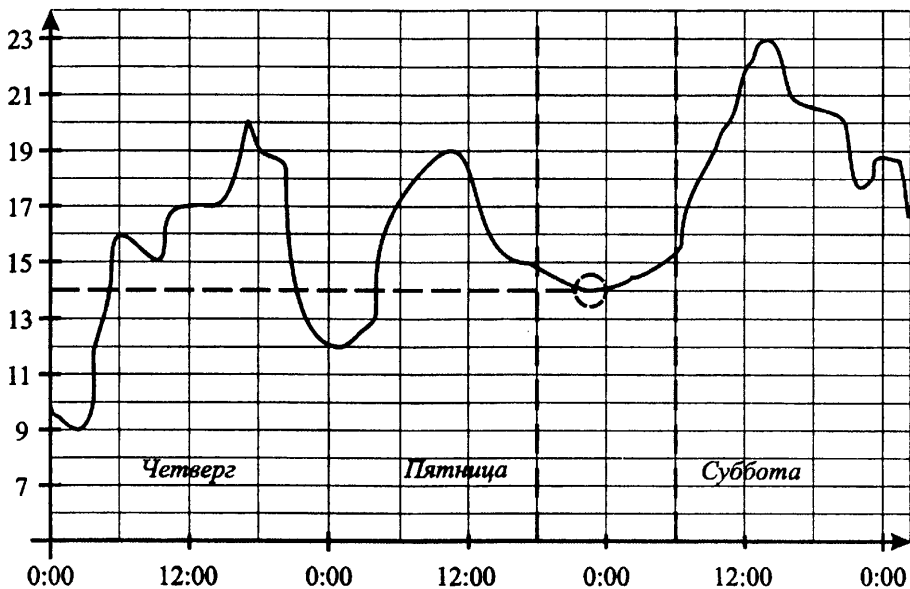


Рис. 292

а) Прочитаем ещё раз задание: «Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь с пятницы на субботу». На графике (см. рис. 292) отметим нужный промежуток времени (ночь с пятницы на субботу). Видим, что ответ — это 14 градусов.

*Ответ:* 14.

б) Прочитаем ещё раз задание: «Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры воздуха в четверг». На графике (см. рис. 293) выделяем временной промежуток — четверг. Находим наи-

меньшее значение 9 и наибольшее 20. Находим разность  $20 - 9 = 11$ .

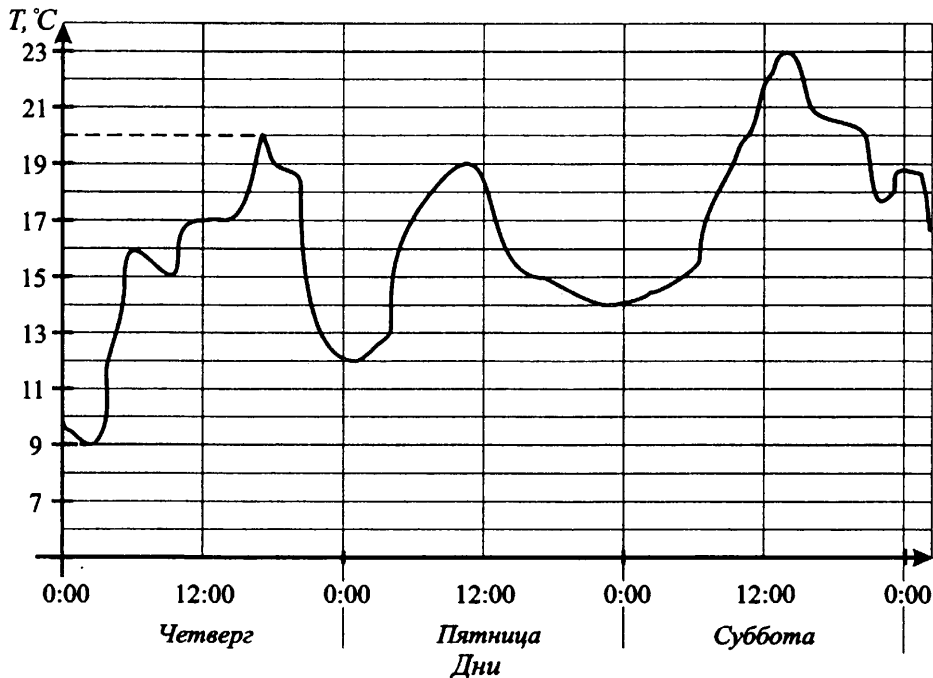


Рис. 293

Ответ: 11.

2. На графике, изображённом на рисунке 294, жирными точками показано изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первые две недели июля. По оси абсцисс отложены числа месяца, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. 3 июля бизнесмен приобрёл 200 акций этой компании. 5 июля он продал 4 июля, а 13 июля — остальные 150. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?

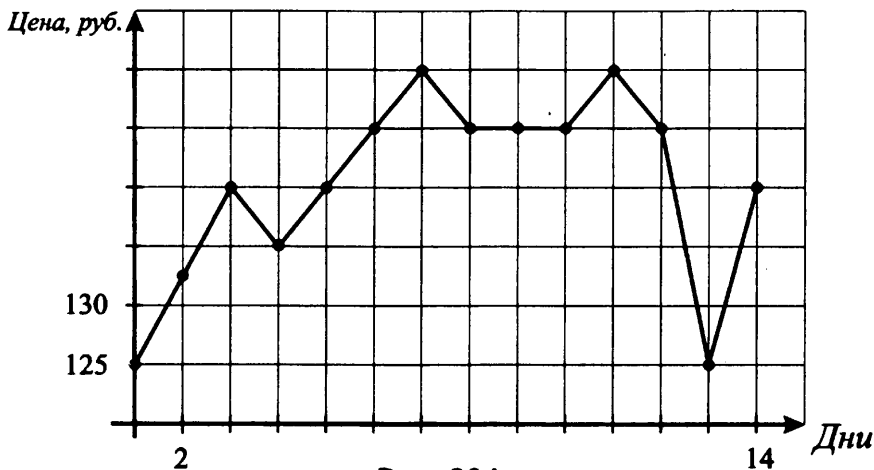


Рис. 294

*Решение.*

Проставим на графике необходимые числа (дни и стоимость акций) (см. рис. 295).

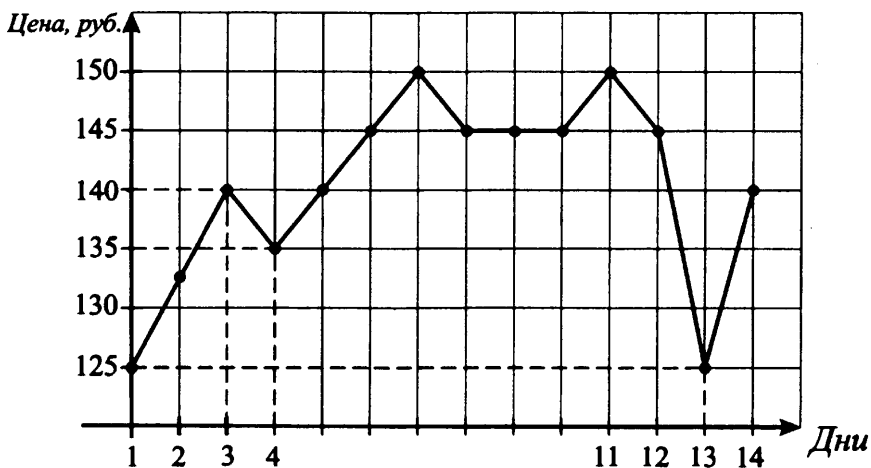


Рис. 295

3 июля бизнесмен приобрёл 200 акций по цене 140 рублей и заплатил  $200 \cdot 140 = 28\,000$  (рублей). 50 акций он продал 4 июля по цене 135 рублей и получил  $50 \cdot 135 = 6\,750$  (рублей),

а 13 июля он продал остальные 150 акций по цене 125 рублей за акцию, получив при этом  $150 \cdot 125 = 18\,750$  (рублей). Всего он получил  $6\,750 + 18\,750 = 25\,500$  (рублей), заплатил 28 000 рублей. Найдём, сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций:  $28\,000 - 25\,500 = 2\,500$  (рублей).

*Ответ:* 2500.

3. Первый посев семян огурцов рекомендуется проводить в мае при среднесуточной температуре воздуха не менее  $+8^\circ\text{C}$ . На рисунке 296 жирными точками показана среднесуточная температура воздуха с 1 по 11 мая. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите, в течение скольких дней за этот период можно было производить посев огурцов.

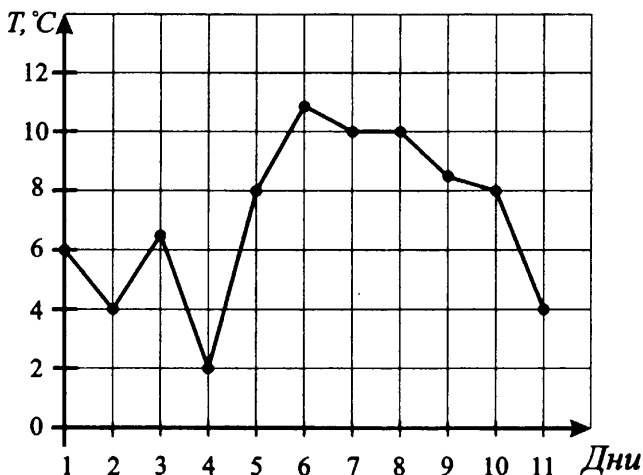


Рис. 296

*Решение.*

Выделим на графике необходимые дни и значения температуры воздуха (см. рис. 297).

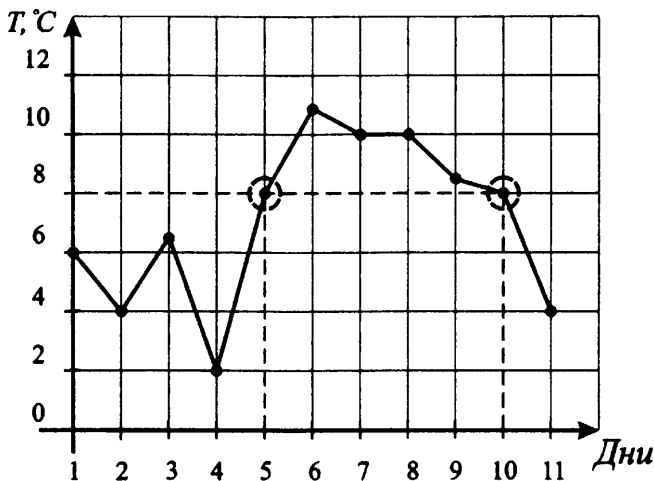


Рис. 297

Среднесуточная температура воздуха в начале мае составляла не менее  $+8^{\circ}\text{C}$  с 5 по 10 мая включительно, значит, в эти дни можно было производить посев огурцов. Обратите внимание, что период с 5 по 10 мая включительно состоит из шести дней.

*Ответ:* 6.

4. Студент Петров выезжает из Батайска в Ростов-на-Дону на занятия в университет. Занятия начинаются в 9:00. В таблице приведено расписание утренних автобусов от автостанции Батайск до автостанции Ростов-на-Дону.

Отправление от автост. Батайск	Прибытие на автост. Ростов-на-Дону
7 : 15	7 : 55
7 : 30	8 : 10
7 : 45	8 : 25
8 : 00	8 : 40



Путь от автостанции до университета занимает 35 минут. Укажите время отправления от автостанции Батайск самого позднего из автобусов, которые подходят студенту.

- 1) 7:15      2) 7:30      3) 7:45      4) 8:00

*Решение.*

Так как путь от автостанции до университета занимает 35 минут, а занятия в университете начинаются в 9:00, то самое позднее время прибытия возможно только в 8:25, поэтому подходит автобус, у которого время отправления в 7:45.

*Ответ:* 3.

### ❓ Варианты для самостоятельного решения

#### Вариант 1

1. На рисунке 298 показано изменение температуры воздуха на протяжении суток. По горизонтали указывается время суток, по вертикали — значения температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурами воздуха за эти сутки. Ответ дайте в градусах Цельсия.

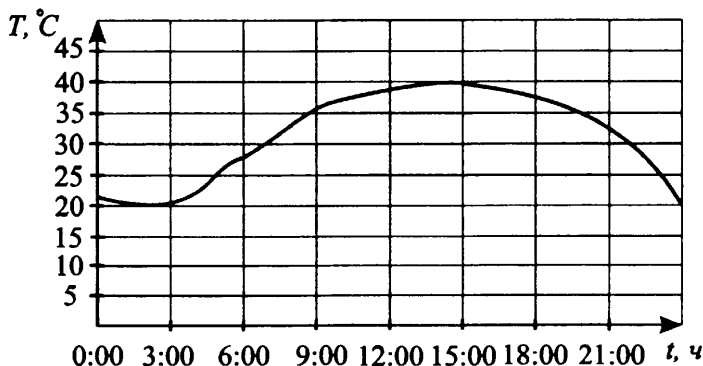


Рис. 298

2. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке 299 показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. По горизонтальной оси откладывается время в часах, прошедшее с момента завершения подзарядки, по вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, через сколько часов работы фонарика после завершения подзарядки напряжение уменьшится до 1,4 вольт.

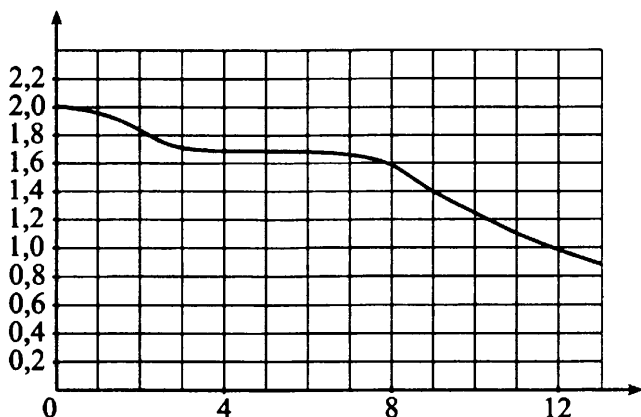


Рис. 299

3. В таблице приведены условия выполнения разрядных требований по подводному плаванию в ластах и с аквалангом для юношей.

Дистанция	1	2	3
50 м (секунды)	20,5	23,5	25,5
100 м (секунды)	45,5	51,5	57,0
200 м (секунды)	107,5	118,0	130,0

Василий проплыл 100 м за 51,55 секунд. Какой разряд по подвodomу плаванию в ластах был присвоен Василию?

- 1) 1 разряд
- 2) 2 разряд
- 3) 3 разряд
- 4) норматив не выполнен

4. Для изготовления книжных полок требуется заказать 24 одинаковых стекла в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла  $0,25 \text{ м}^2$ . В таблице приведены цены на стекло, а также на перевозку. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за $1 \text{ м}^2$ )	Перевозка (руб. за весь заказ)
А	420	200
Б	440	150
В	460	бесплатно

### Вариант 2

1. Студент Иванов выезжает из Ростова-на-Дону в Москву на студенческую научно-практическую конференцию в МГУ. Конференция начинается в 11:30. В таблице приведено расписание утренних самолётов от аэропорта г. Ростов-на-Дону до аэропорта Шереметьево в Москве.

Отправление из аэропорта г. Ростова-на-Дону	Прибытие в аэропорт г. Москвы
5 : 20	6 : 45
6 : 30	7 : 55
7 : 25	8 : 50
8 : 20	9 : 45

Путь от аэропорта до университета МГУ занимает 1 час 45 минут. Укажите время отправления самого позднего из рейсов самолёта, которые подходят студенту.

- 1) 5:20                      2) 6:30                      3) 7:25                      4) 8:20

2. На рисунке 300 показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте в течение двух суток. По горизонтали указывается время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия.

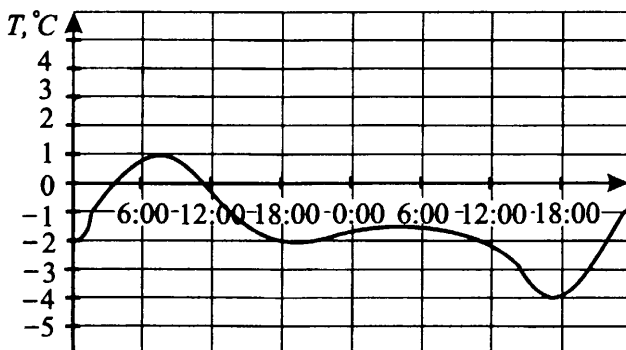


Рис. 300

Определите по графику разность (в градусах Цельсия) между наибольшей и наименьшей температурами воздуха за эти двое суток.

3. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа оборотов в минуту (см. рис. 301). На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н·м. Чему равен крутящий момент (в Н·м), если двигатель делает 3500 оборотов в минуту?

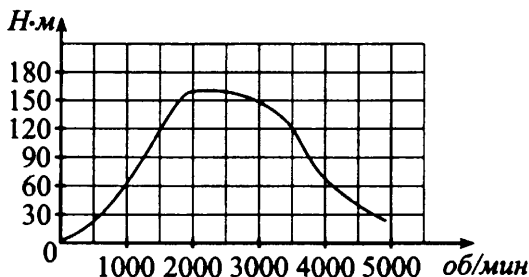


Рис. 301

4. В таблице приведены тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 50 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Стоимость 1 минуты поездки
А	150 руб.	7 руб.
Б	Бесплатно	12 руб.
В	50 руб.	10 руб.

## Вариант 3

1. Дорожный знак, изображённый на рисунке 302, называется «Ограничение длины». Его устанавливают там, где запрещён проезд транспортного средства, габариты которого (с грузом или без груза) превышают установленную длину. Какому из транспортных средств этот знак запрещает проезд?



Рис. 302

1) «Камаз» с прицепом для перевозки леса длиной 12500 мм

2) «МАЗ» для перевозки рельсов длиной 10 250 мм

3) «Вольво» для перевозки труб длиной 11 750 мм

4) «ГАЗ» для перевозки труб длиной 9800 мм

2. В таблице приведены условия выполнения разрядных требований по подводному плаванию в ластах и с аквалангом для девушек.

Дистанция	1	2	3
50 м (секунды)	24,0	26,5	29,0
100 м (секунды)	51,5	59,0	69,0
200 м (секунды)	112,0	130,0	150,0

Татьяна проплыла 50 м за 24,15 секунды. Какой разряд по подводному плаванию в ластах получила Татьяна?

1) 1 разряд

2) 2 разряд

3) 3 разряд

4) норматив не выполнен

3. На рисунке 303 показано изменение температуры воздуха на протяжении суток. По горизонтали указывается время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия.

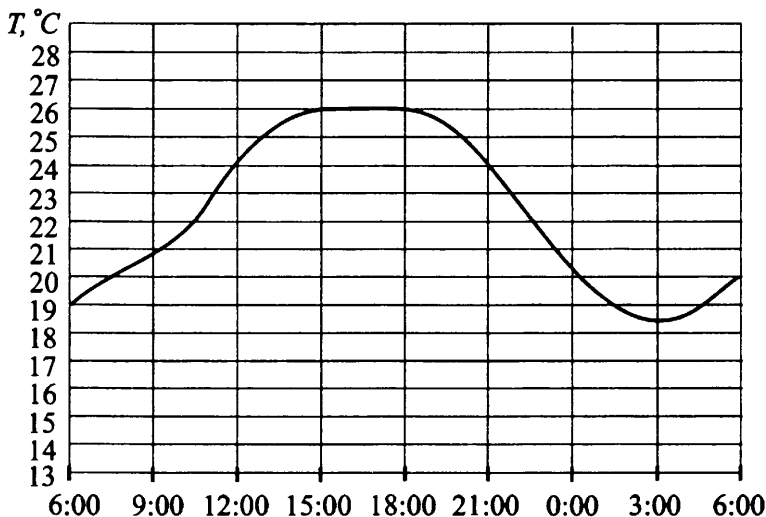


Рис. 303

Определите по графику, сколько часов прошло между моментами, когда температура впервые за эти сутки приняла наибольшее и наименьшее значения.

4. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля (см. рис. 304). На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, за сколько минут двигатель нагреется с  $40^{\circ}\text{C}$  до  $70^{\circ}\text{C}$ .

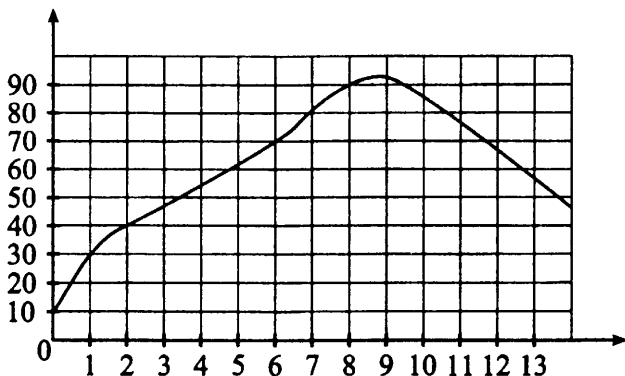


Рис. 304

### Вариант 4

1. Дорожный знак, изображённый на рисунке 305, называется «Ограничение по весу». Его устанавливают там, где запрещён проезд транспортного средства по мосту (с грузом или без груза), превышающего установленный тоннаж. Какому из транспортных средств этот знак запрещает проезд?



Рис. 305

- 1) Грузовику «ГАЗ» с грузом 900 кг
- 2) Грузовику «Мерседес» с грузом 8900 кг
- 3) Бортовому грузовику для перевозки двадцати труб весом по 500 кг
- 4) Грузовику «МАЗ» с грузом 7800 кг



2. На рисунке 306 показано изменение температуры воздуха на протяжении двух суток. По горизонтали указывается время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия.

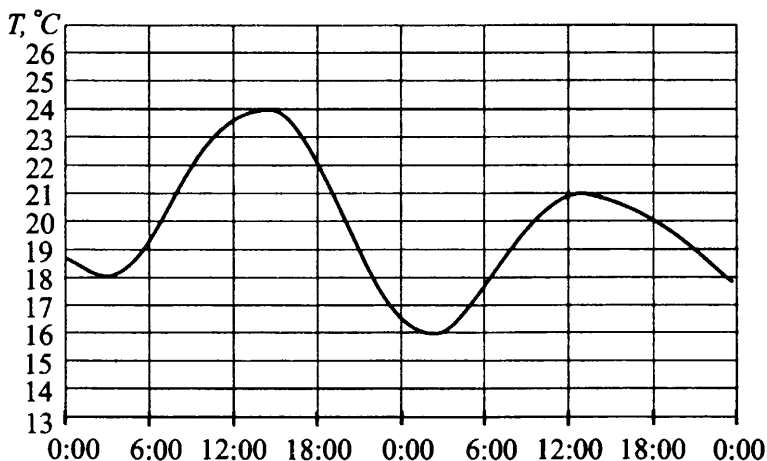


Рис. 306

Определите по графику разницу (в градусах Цельсия) между наименьшими значениями температуры за эти двое суток.

3. В аэропорту чемоданы пассажиров поднимают в зал выдачи багажа по транспортёрной ленте. При проектировании транспортёра необходимо учитывать допустимую силу натяжения ленты транспорта. На рисунке 307 изображена зависимость натяжения ленты от  $\alpha$  — угла наклона транспортёра к горизонту при расчётной нагрузке. На оси абсцисс откладывается угол подъёма в градусах, на оси ор-

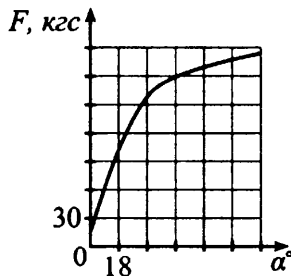


Рис. 307

динат — сила натяжения транспортёрной ленты (в килограммах силы). При каком угле наклона сила натяжения достигает 180 кгс? Ответ дайте в градусах.

4. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

	1	2	3
<b>Автобус</b>	От дома до автобусной станции — 10 мин	Автобус в пути: 1 ч 15 мин	От остановки автобуса до дачи пешком — 5 мин
<b>Электричка</b>	От дома до станции железной дороги — 25 мин	Электричка в пути: 1 ч 5 мин	От станции до дачи пешком — 10 мин
<b>Маршрутное такси</b>	От дома до остановки маршрутного такси — 25 мин	Маршрутное такси в дороге — 35 мин	От остановки маршрутного такси до дачи пешком — 35 мин

## Вариант 5

1. Можно перевезти 56 т груза на стройку, заказав машину в одной из трёх фирм.

Название фирмы	Грузоподъёмность одной машины в т	Стоимость аренды 1 машины в рублях
А	5	3500
Б	8	4600
В	10	5800

Какую наименьшую сумму (в рублях) надо заплатить, чтобы перевезти груз на машинах одной из этих фирм?

2. На рисунке 308 показан график зависимости длины тормозного пути некоторого автомобиля от скорости, с которой он может двигаться по тренировочному треку. По горизонтальной оси откладывается скорость (в км/ч), по вертикальной — длина тормозного пути (в метрах). Определите по графику, с какой наибольшей скоростью может двигаться в данных условиях автомобиль, чтобы его тормозной путь был не более 45 м. Ответ укажите в км/ч.

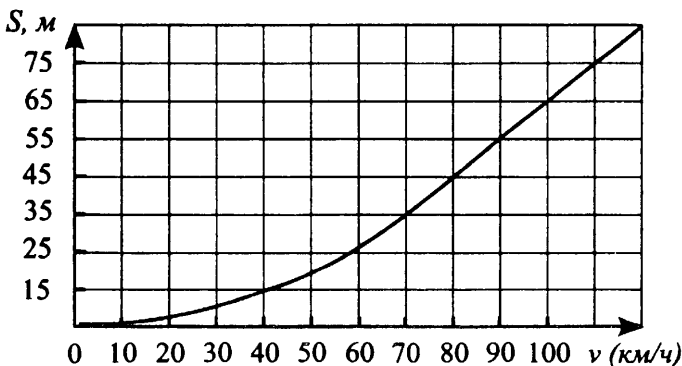


Рис. 308

3. Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя: чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке 309 показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. Сколько ампер составляет сила тока в цепи при сопротивлении 1,5 Ом?

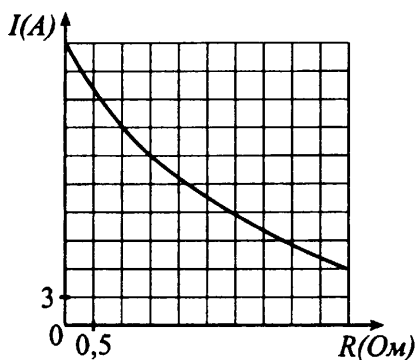


Рис. 309

4. Для строительства дачи нужно приобрести 20 кубометров строительного бруса у одного из двух поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена бруса (за 1 м <sup>3</sup> )	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	3100 руб.	9200 руб.	
Б	3300 руб.	8000 руб.	При заказе на сумму больше 60 000 руб. доставка бесплатно

## Вариант 6

1. На рисунке 310 показан график изменения разряда аккумулятора мобильного телефона. На вертикальной оси отмечается напряжение (в вольтах), на горизонтальной оси — время работы телефона (в часах) после подзарядки. Определите по графику, какое напряжение (в вольтах) будет давать аккумулятор через 20 часов после подзарядки.

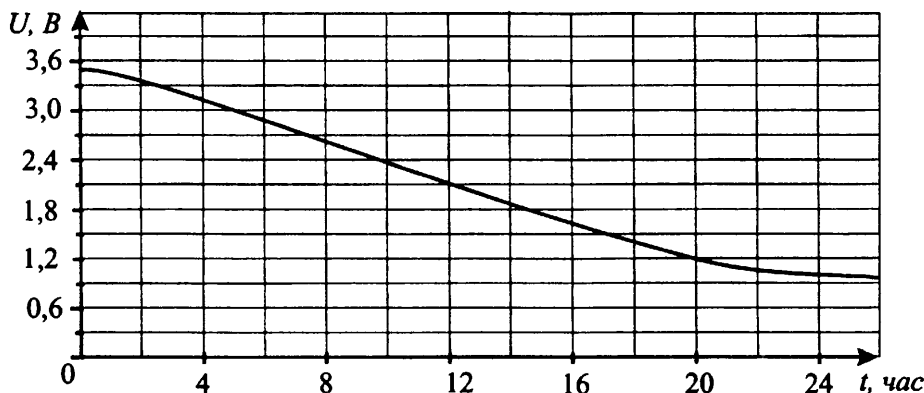


Рис. 310

2. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, со временем уменьшается.

На рисунке 311 эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за первые четыре минуты.

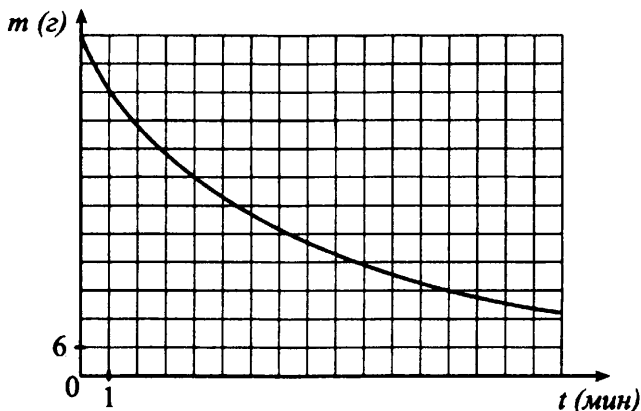


Рис. 311

3. На соревнованиях по фигурному катанию за произвольную программу были выставлены баллы. Выпишите номера двух спортсменов, ставших победителями.

Номера участников	1	2	3	4	5
Результаты (баллы)	5,5	6,0	5,6	5,9	5,2

1) 2; 3

2) 2; 4

3) 2; 1

4) 3; 4

4. Дорожный знак, изображённый на рисунке 312, называется «Ограничение высоты». Его устанавливают там, где запрещён проезд транспортного средства, габариты которого (с грузом или без груза) превышают установленную высоту. Какому из данных транспортных средств этот знак запрещает проезд?

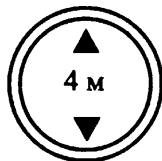


Рис. 312

1) автомобилю «Газель» высотой 1800 мм

2) бензовозу высотой 3500 мм

3) троллейбусу высотой 3700 мм

4) международному автобусу высотой 4500 мм

## Глава 11. Практическая геометрия

Как правило, в задачах практической геометрии используется подобие треугольников. Напомним некоторые определения и теоремы.

### ① Немного полезной информации

#### Подобие фигур

Часто встречаются фигуры, которые имеют разные размеры, но одинаковую форму, например, все круги или все квадраты. Такие фигуры называют подобными.

Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны друг другу ( $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ), если  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$  и  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$ , где  $k$  называют коэффициентом подобия (см. рис. 313).

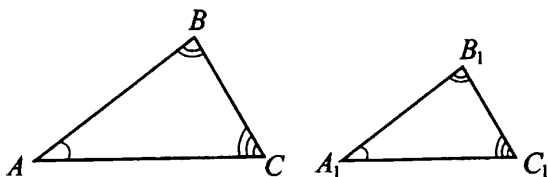


Рис. 313

В подобных треугольниках медианы, биссектрисы и высоты пропорциональны с тем же коэффициентом.

#### Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Например, если  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ , то  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (см. рис. 314).

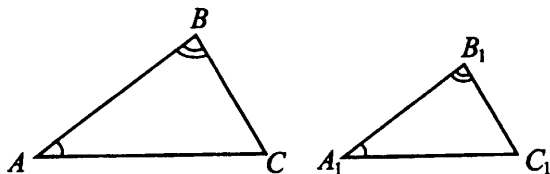


Рис. 314

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключённые между этими двумя сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

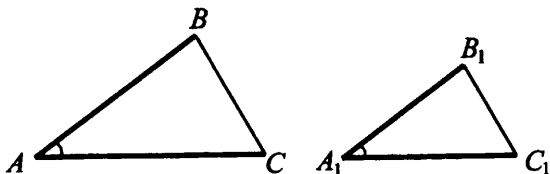


Рис. 315

Например, если  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$  и  $\angle A = \angle A_1$ , то  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (см. рис. 315).

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.

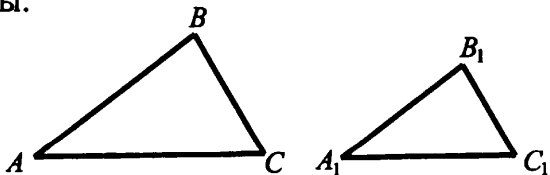


Рис. 316

Например, если  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$ , то  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (см. рис. 316).



### Теорема Пифагора.

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Например,  $AB^2 = AC^2 + BC^2$  (см. рис. 317).

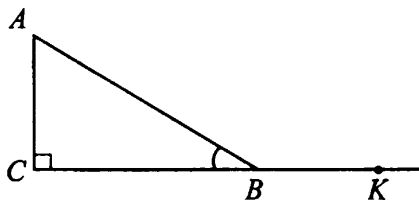


Рис. 317

### Задачи с решениями

1. От столба к палатке «Мороженое» натянут провод длиной 13 м, который закреплен на стене палатки на высоте 3 м от земли (см. рис. 318). Вычислите высоту столба, если расстояние от палатки до столба равно 12 м.

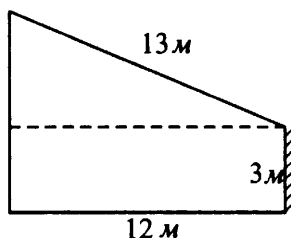


Рис. 318

*Решение.*

В  $\triangle ABC$  (см. рис. 319)  $\angle A = 90^\circ$ ,  $AC = 12$  м,  $BC = 13$  м. По теореме Пифагора имеем  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ . Отсюда  $AB^2 = BC^2 - AC^2$ ,  $AB^2 = 13^2 - 12^2 = 25$ ,  $AB = 5$  м.

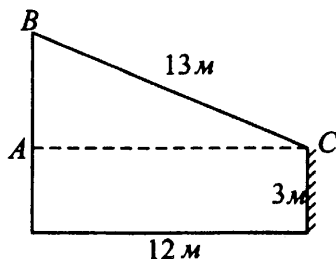


Рис. 319

Учитывая, что высота палатки 3 м, найдём высоту столба:  
 $5 \text{ м} + 3 \text{ м} = 8 \text{ м}$ .

*Ответ:* 8.

2. Определите ширину реки  $AA_1$  (см. рис. 320), если  $BC_1 = 50 \text{ м}$ ,  $BC = 15 \text{ м}$ ,  $AB = 18 \text{ м}$ ,  $\angle A = \angle A_1$ . (Ответ дайте в метрах.)

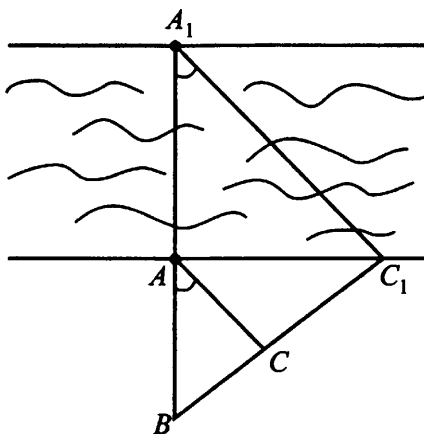


Рис. 320

*Решение.*

На местности отметим точки  $A$  и  $B$  так, чтобы они находились на одной прямой с точкой  $A_1$ . На берегу отметим точки  $C$  и  $C_1$  так, чтобы  $AC$  была параллельна  $A_1C_1$ .

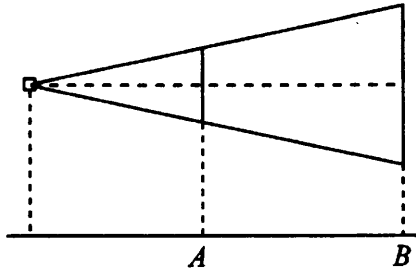
Получим  $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$ ,

$$\frac{A_1B}{AB} = \frac{BC_1}{BC}, A_1B = \frac{AB \cdot BC_1}{BC} = \frac{18 \cdot 50}{15} = 60 \text{ (м)}.$$

$$AA_1 = A_1B - AB = 60 - 18 = 42 \text{ (м)}.$$

*Ответ:* 42.

3. Проектор полностью освещает экран  $A$  высотой 60 см, расположенный на расстоянии 300 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран  $B$  высотой 150 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными (см. рис. 321)?



**Рис. 321**

*Решение.*

Из рисунка 322  $\triangle OAA_1 \sim \triangle OBB_1$ , значит,

$$\frac{BB_1}{AA_1} = \frac{OH_1}{OH}, \frac{150}{60} = \frac{OH_1}{300},$$

$$OH_1 = 300 \cdot \frac{150}{60} = 5 \cdot 150 = 750 \text{ (см)}.$$

Здесь используется свойство, что высоты подобных треугольников ( $OH$  и  $OH_1$ ) относятся так же, как и стороны ( $\frac{OH_1}{OH} = \frac{BB_1}{AA_1}$ ).

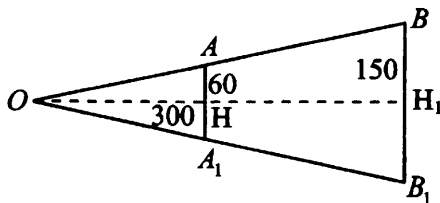


Рис. 322

Ответ: 750.

4. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 20 шагов от фонарного столба и отбрасывает тень длиной в 20 шагов. Определите высоту столба в метрах.

Решение.

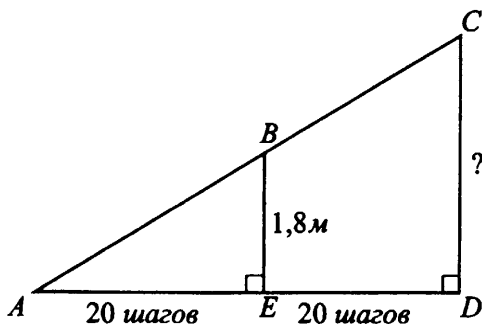


Рис. 323

Рассмотрим рисунок 323.  $\triangle ACD \sim \triangle ABE$ ,  $\frac{CD}{BE} = \frac{AD}{AE}$ ;

$$AD = AE + ED = 20 + 20 = 40; \quad \frac{CD}{1,8} = \frac{40}{20}; \quad \frac{CD}{1,8} = 2;$$

$$CD = 3,6 \text{ (м)}.$$

Ответ: 3,6.

**Движение плоскости** — это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние.

### Осевая симметрия

**Осевая симметрия** задаётся прямой, которую называют осью симметрии. Две точки  $A$  и  $A_1$  называются симметричными относительно прямой  $a$ , если эта прямая проходит через середину отрезка  $AA_1$  и перпендикулярна к нему (см. рис. 324).

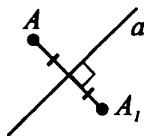


Рис. 324

Если точка лежит на прямой  $a$ , то она симметрична сама себе относительно этой прямой.

У фигуры есть **ось симметрии** — прямая  $a$ , если для каждой точки фигуры симметричная ей относительно прямой  $a$  точка также принадлежит этой фигуре. На рисунке 325 изображены оси симметрии некоторых фигур. Если мысленно «перегнуть» фигуру по оси симметрии, то части фигуры должны совпасть.

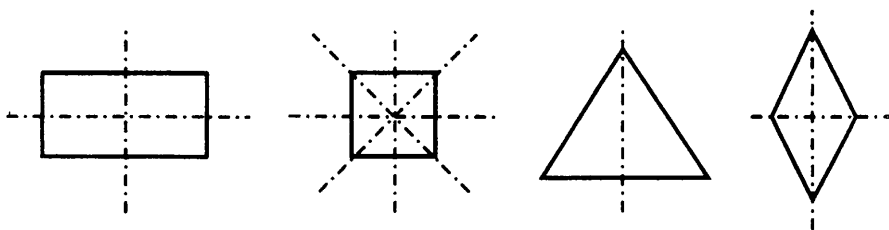


Рис. 325

## Центральная симметрия

**Центральная симметрия** задаётся точкой. Эта точка называется **центром симметрии**.

Две точки  $A$  и  $A_1$  называются симметричными относительно точки  $O$ , если  $O$  — середина отрезка  $AA_1$  (см. рис. 326).

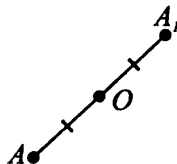


Рис. 326

Фигура называется симметричной относительно точки  $O$ , если для каждой точки фигуры симметричная ей относительно  $O$  точка также принадлежит этой фигуре. На рисунке 327 изображены центры симметрии некоторых фигур.

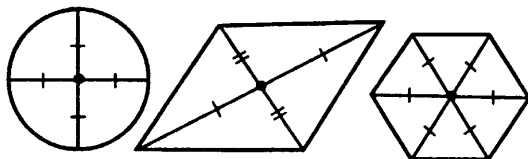



Рис. 327

## Параллельный перенос

**Параллельный перенос** задаётся вектором. При параллельном переносе на вектор  $\vec{a}$  точка  $M$  отображается в точку  $M_1$ , если  $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$ .



Рис. 328

Рисунок 328 получен применённым трижды параллельным переносом фигуры  на вектор  $\vec{a}$ , равный длине этой фигуры.

## Поворот

**Поворот** задаётся неподвижной точкой и углом поворота.

Поворотом плоскости вокруг точки  $O$  на угол  $\alpha$  называют отображение плоскости на себя, при котором точка  $M$  отображается в точку  $M_1$  так, что  $OM = OM_1$  и  $\angle MOM_1$  равен  $\alpha$  (см. рис. 329).

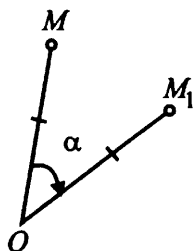


Рис. 329

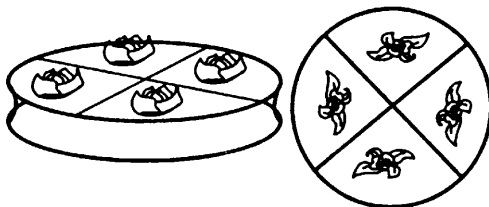


Рис. 330

На рисунке 330 торт порезан на куски, каждый из которых получился из соседнего поворотом на  $90^\circ$ . При повороте на  $90^\circ$  торт «переходит сам в себя».

### ⚡ Задачи с решениями

1. а) Колесо имеет 12 спиц (см. рис. 331). Сколько осей симметрии имеет колесо?

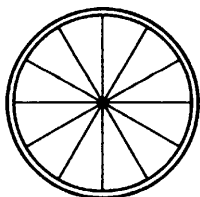


Рис. 331

б) Сколько всего осей симметрии имеет фрагмент, изображённый на рисунке?

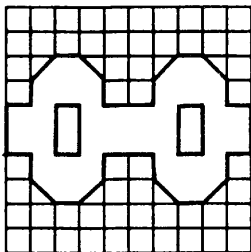


Рис. 332

в) Сколько всего осей симметрии имеет фигура, изображённая на рисунке 333?

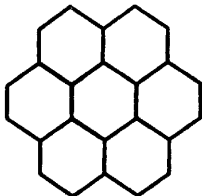


Рис. 333

*Решение.*

а) Оси симметрии проходят как «по спицам», так и посередине между спицами (как показано на рисунке 334). Всего 12 осей симметрии.

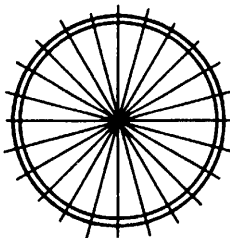


Рис. 334

*Ответ:* 12.



б) Оси симметрии проходят так, как показано на рисунке 335. Таких осей 2.

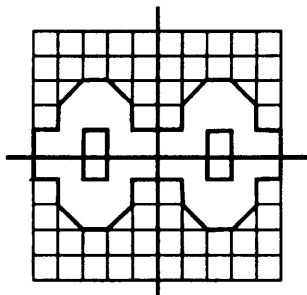


Рис. 335

Ответ: 2.

в) Оси симметрии проходят так, как показано на рисунке 336. Таких осей 6.

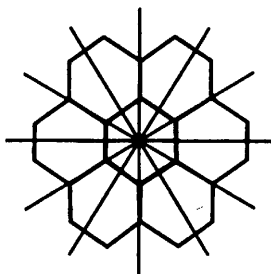


Рис. 336

Ответ: 6.

2. Пол на кухне разбит на маленькие равные квадраты, некоторые из них чёрного цвета (см. рис. 337). Какое минимальное количество квадратов чёрного цвета нужно ещё приклеить на пол, чтобы полученная фигура стала симметричной относительно диагонали кухни — прямой  $AB$ ?

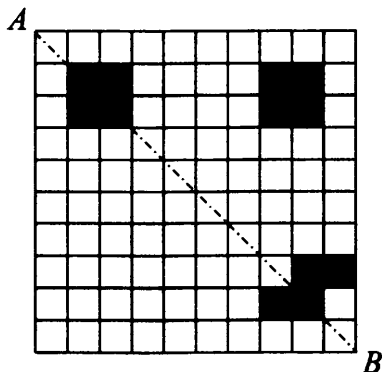


Рис. 337

*Решение.*

На рисунке 338 выделены пунктиром квадраты, которые нужно приклеить на пол, чтобы полученная фигура стала симметричной относительно диагонали  $AB$ . Видим, что таких квадратов 5.

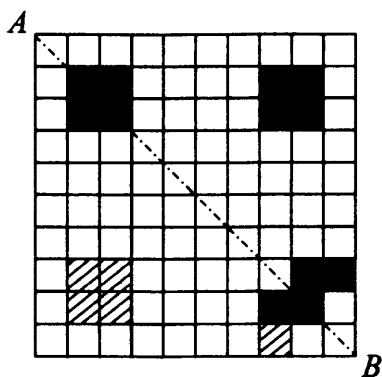


Рис. 338

*Ответ:* 5.

3. Карточку, изображённую на рисунке 339, повернули на  $90^\circ$  по часовой стрелке.

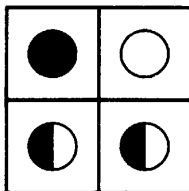


Рис. 339

Какая из карточек, изображённых на рисунке 340, при этом получилась?

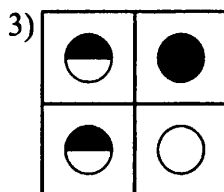
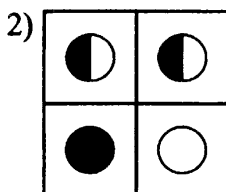
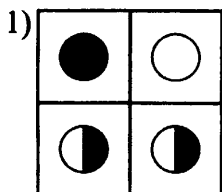


Рис. 340

*Решение.*

При повороте карточки на  $90^\circ$  по часовой стрелке можно получить только карточку 3 на рисунке 340, потому что, например, чёрный кружок повернётся и попадёт в правый верхний угол (см. рис. 341). Убедитесь, что и другие круги перейдут на места кружков карточки 3 рисунка 340.

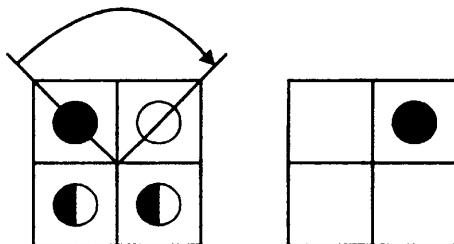


Рис. 341

*Ответ:* 3.

4. Воздушный шар взлетел из пункта  $A$  и летит с постоянной скоростью 10 км/ч в течение 3 часов. Затем он поворачивает на  $90^\circ$  и летит с той же скоростью ещё 4 часа и прибывает в пункт  $B$ . Найдите расстояние от  $A$  до  $B$  в километрах.

*Решение.*

Нарисуем схему полёта шара (см. рис. 342). Видим, что до точки поворота шар пролетел расстояние  $AP = 10 \cdot 3 = 30$  км, а после точки поворота — расстояние  $PB = 10 \cdot 4 = 40$  км. По теореме Пифагора найдём  $AB$ .  $AB^2 = AP^2 + PB^2 = 30^2 + 40^2 = 2500$ ,  $AB = 50$  (км).

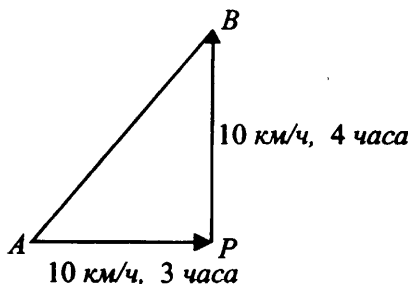


Рис. 342

Ответ: 50.

### ② Варианты для самостоятельного решения

#### Вариант 1

1. Для определения высоты башни можно использовать зеркало, как показано на рисунке 343. Луч света  $CD$ , отражаясь от зеркала в точке  $C$ , попадает в глаз человека (точку  $B$ ). Определите высоту башни, если рост человека  $AB = 165$  см,  $AC = 120$  см,  $KC = 9,6$  м,  $\angle 1 = \angle 2$ . Ответ выразите в метрах.

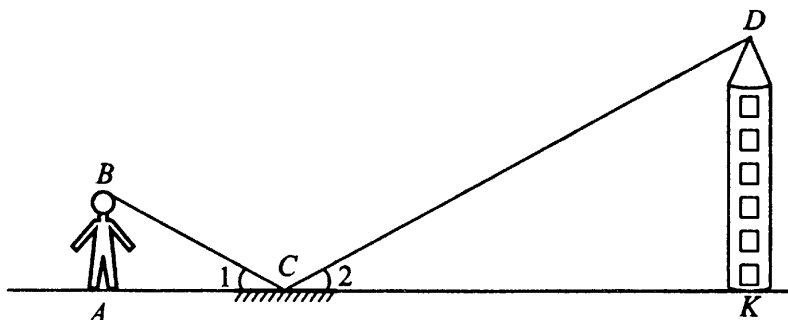


Рис. 343

2. Найдите высоту здания (см. рис. 344), если длина его тени равна 45 м, а длина тени человека ростом 180 см равна 3 м. Ответ выразите в метрах.

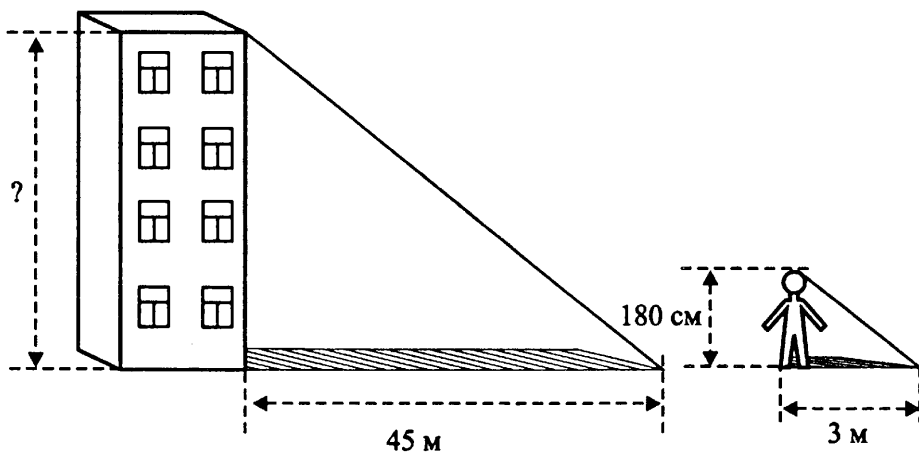


Рис. 344

3. Мальчики хотят покататься на качелях (см. рис. 345), короткое плечо которых имеет длину 100 см, а длинное — 200 см. Петя сел на длинное плечо качелей, а Коля — на короткое. На сколько метров поднимется Петя, если Коля опустился на 40 см?

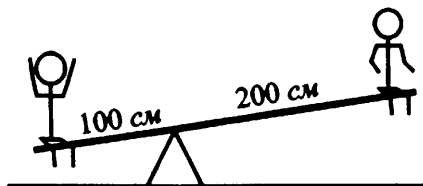


Рис. 345

4. Проектор полностью освещает экран  $A$  высотой 40 см, расположенный на расстоянии 120 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран  $B$  высотой 200 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора останутся неизменными (см. рис. 346)?

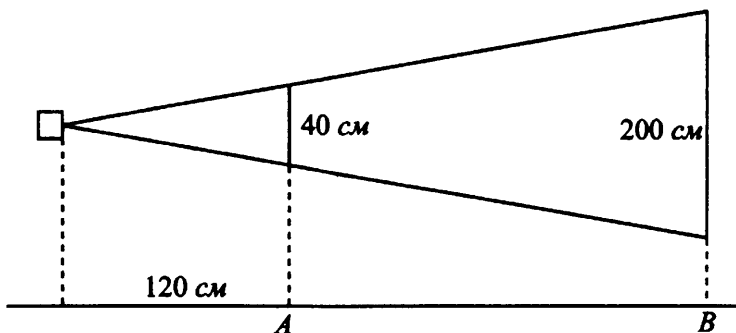


Рис. 346

### Вариант 2

1. Проектор полностью освещает экран  $A$  высотой 140 см, расположенный на расстоянии 350 см от проектора (см. рис. 347). На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран  $B$  высотой

70 см, чтобы он был полностью освещен, если настройки проектора остаются неизменными?

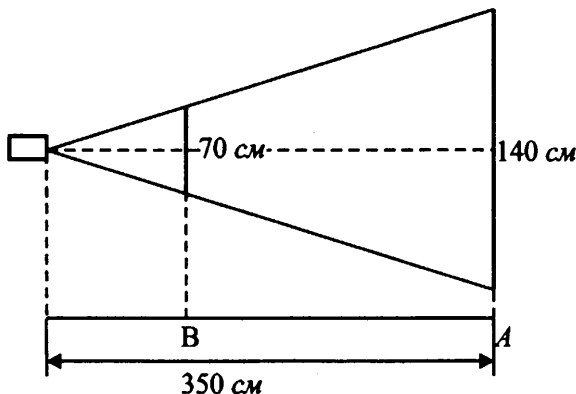


Рис. 347

2. Лампа висит над центром стола с квадратной поверхностью размером  $1,2 \text{ м} \times 1,2 \text{ м}$  на высоте  $2,4 \text{ м}$  от стола (см. рис. 348). Найдите длину тени стола, если высота стола равна  $0,8 \text{ м}$ . Ответ укажите в метрах.

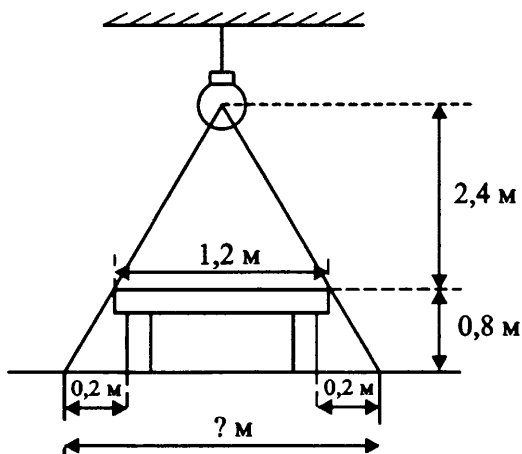


Рис. 348

3. Найдите высоту ёлочки, растущей в шести метрах от фонарного столба (см. рис. 349) высотой 4,5 м, если она отбрасывает тень длиной 3 м. Ответ дайте в метрах.

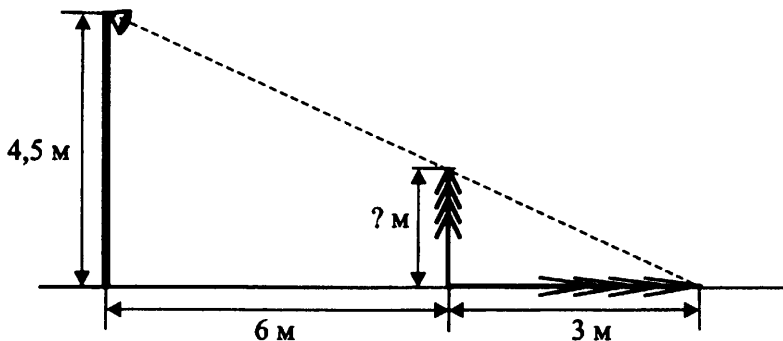


Рис. 349

4. Определите ширину реки  $AA_1$  (см. рис. 350), если  $AB = 21$  м,  $BC_1 = 30$  м,  $BC = 14$  м,  $\angle A = \angle A_1$ . (Ответ дайте в метрах.)

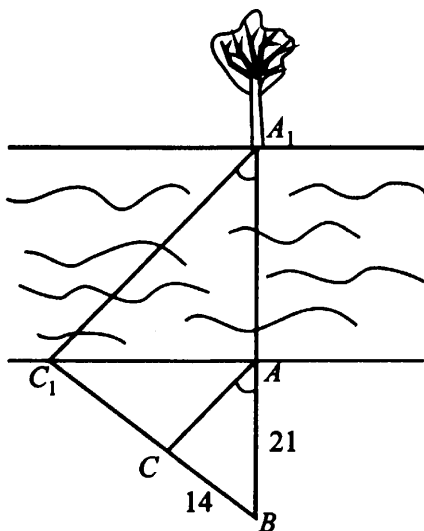


Рис. 350



## Вариант 3

1. Спортивная площадка площадью  $72 \text{ м}^2$  имеет форму квадрата (см. рис. 351). Лампа освещает круг радиуса, равного высоте, на которой она подвешена. На какой минимальной высоте (в м) следует подвесить лампу, чтобы осветить всю площадку?

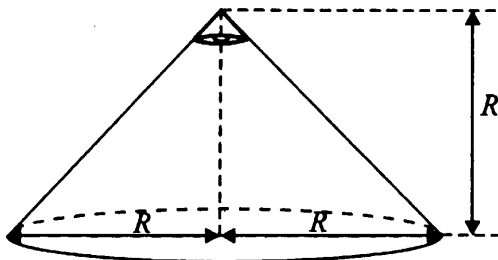


Рис. 351

2. Удочка закреплена на берегу в точках  $K$  и  $L$ , как показано на рисунке 352. Крепление  $L$  неподвижно и находится на расстоянии 60 см от одного конца удочки и 180 см от другого. На сколько опустится длинный конец удочки, если короткий поднимется на 20 см? Ответ дайте в метрах.

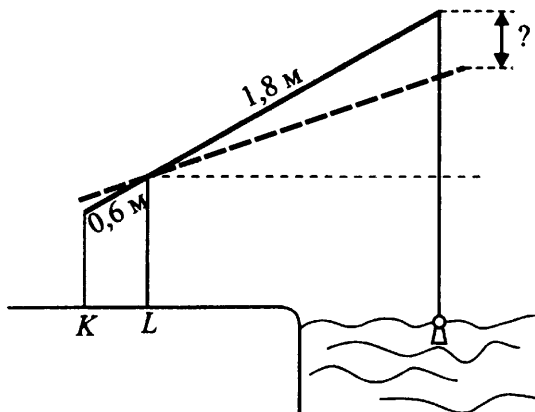


Рис. 352

3. В городском парке на одном берегу бассейна стоит фонарь высотой 5 м (см. рис. 353). На другом берегу стоит подросток ростом 1 м 50 см. Найдите ширину бассейна (в м), если длина тени подростка равна 3 м.

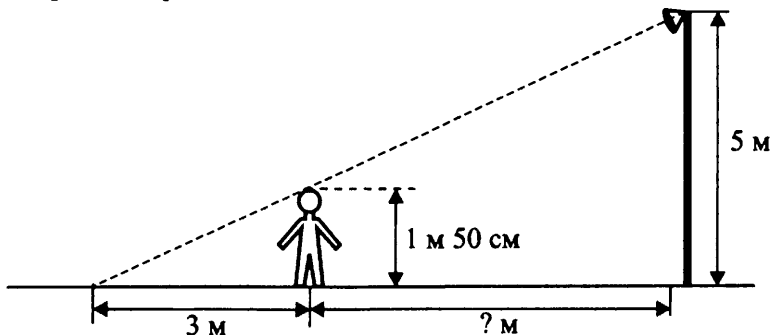


Рис. 353

4. Проектор полностью освещает экран  $B$  высотой 240 см, расположенный на расстоянии 400 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) надо расположить экран  $A$ , высота которого 30 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора останутся неизменными (см. рис. 354)?

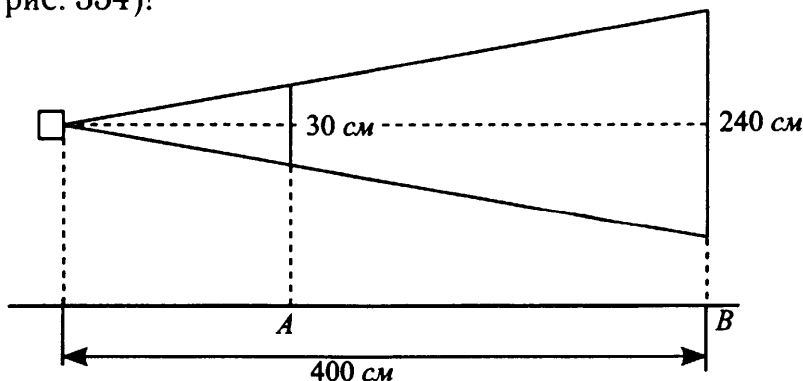


Рис. 354

## Вариант 4

1. Человек ростом 180 см видит фонарь в зеркале, лежащем на земле в 150 см от его ног (см. рис. 355). Определите высоту фонарного столба, если расстояние от зеркала до столба равно 4,5 м. (Ответ дайте в метрах.)

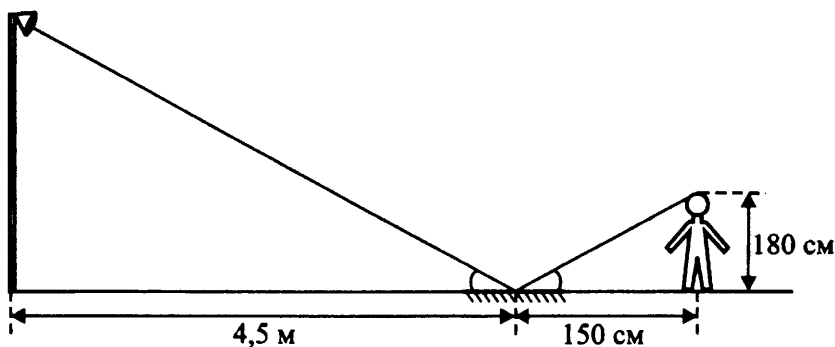


Рис. 355

2. Лестничный пролёт состоит из 15 ступенек, высота каждой из которых 15 см, ширина 20 см (см. рис. 356). Определите длину поручня  $MN$  (в м), если известно, что расстояние от основания первой ступеньки до поручня  $NN_1$  равно расстоянию  $MM_1$  от последней ступеньки до поручня.

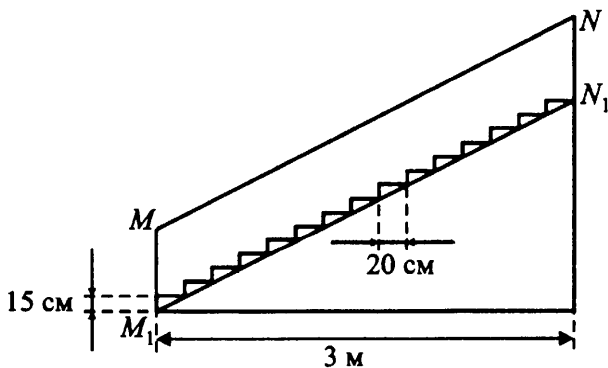


Рис. 356

3. На сколько метров поднимется прикрепленный к колодезному журавлю конец верёвки (см. рис. 357), если человек опустил конец журавля на 60 см?

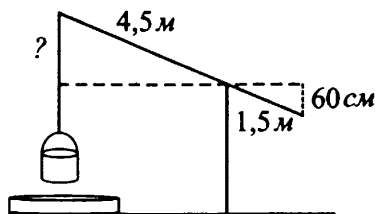


Рис. 357

4. Высота ёлочки 1,5 м. Найдите высоту дерева (в метрах), растущего в четырёх метрах от ёлочки, если тени от дерева и от ёлочки достигают куста роз (см. рис. 358).

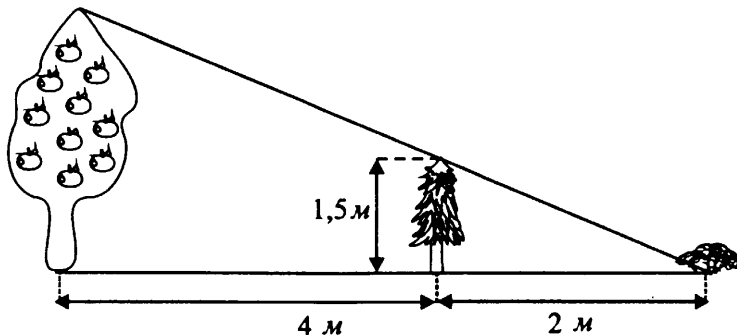


Рис. 358

## Вариант 5

1. На сколько метров от точки  $A$  удалено дерево на другой стороне реки (см. рис. 359), если  $AB = 18$  м,  $CD = 15$  м и  $AC = 40$  м?

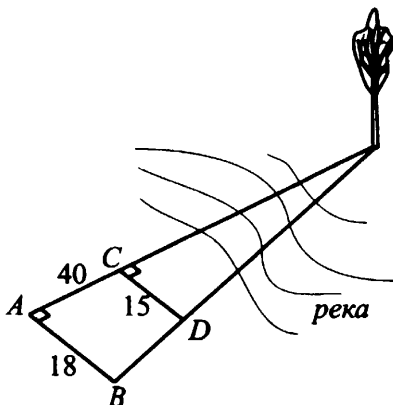


Рис. 359

2. Человек ростом 1,8 м видит верхушку дерева и край крыши дома (см. рис. 360). Высота дерева 3,6 м, расстояние от человека до дерева 3,6 м, от дерева до дома 7 м. Определите высоту дома (в метрах).

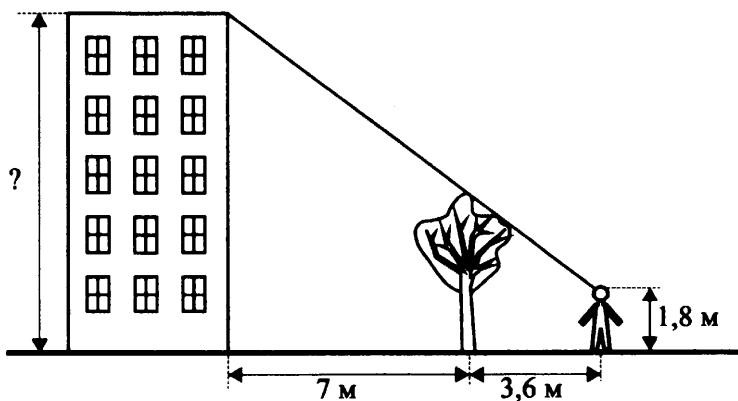


Рис. 360

3. В цирке на качелях выступают медвежата Маша и Миша. Миша сел на короткое плечо длиной 120 см, а Маша на плечо длиной 240 см (см. рис. 361). На сколько метров поднимется Маша, если Миша опустил на 50 см?

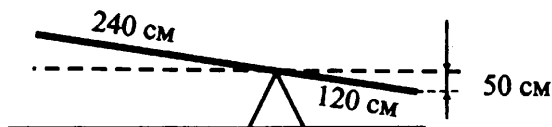


Рис. 361

4. Для освещения рекламного щита от уличного фонаря протянули провод к прожектору  $A$  (см. рис. 362). Найдите длину провода, если расстояние от фонаря до здания 40 м, высота здания 14 м, высота фонаря 5 м. Ответ дайте в метрах.

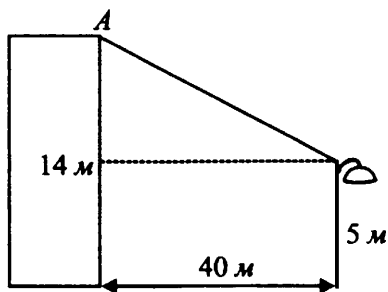


Рис. 362

## Глава 12. Текстовые задачи

### Пропорции, части

#### ① Немного полезной информации

- Равенство двух отношений называют пропорцией.
- В пропорции  $a : b = c : d$ , или  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , числа  $a$  и  $d$  называются **крайними членами**, а числа  $b$  и  $c$  — **средними членами** пропорции.
- В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних членов, т. е.  $a \cdot d = b \cdot c$ .
- Неизвестный крайний член пропорции равен произведению средних членов, делённому на известный крайний член.

Например,  $x : 5 = 8 : 4$ ,  $x = \frac{5 \cdot 8}{4} = 10$ .

- Неизвестный средний член пропорции равен произведению крайних членов, делённому на известный средний.

Например,  $9 : 3 = x : 2$ ,  $x = \frac{9 \cdot 2}{3} = 6$ .

#### ☞ Задачи с решениями

1. Автобус Москва — Вологодск отправляется в 19:50, а прибывает в 15:50 на следующий день (время московское). Сколько часов автобус находится в пути?

*Решение.*

Так как минуты времени отправления и прибытия одинаковые, можно их уменьшить и заменить на 00. Нужно посчи-

тать, сколько часов пройдет от 19.00 до 15.00 следующего дня. В первый день пройдет  $24 - 19 = 5$  часов, во второй еще 15 часов, всего  $15 + 5 = 20$  часов.

*Ответ:* 20.

2. В доме, в котором живет Пётр Иванович, один подъезд. На каждом этаже по четыре квартиры. Пётр Иванович живет в квартире 27. На каком этаже живет Пётр Иванович?

*Решение.*

Разделим 27 на 4. Получится 6 и 3 в остатке. Шесть этажей заполнилось полностью, и ещё 3 квартиры расположены на 7-м этаже. Значит, Пётр Иванович живет на 7-м этаже.

*Ответ:* 7.

3. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 2 рубля 30 копеек. Счётчик электроэнергии 1 мая показывал 634126 киловатт-часов, а 1 июня показывал 634308 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за май?

*Решение.*

Найдем разницу показаний счётчика. Первые три цифры одинаковы, их можно не учитывать. Разница равна  $308 - 126 = 182$ . Найдем, сколько рублей нужно заплатить за 182 киловатт-часа.  $182 \cdot 2,3 = 418,6$  рублей.

*Ответ:* 418,6.

4. При оплате услуг через платежный терминал взимается комиссия 7%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Маруся хочет положить на счёт своего мобильного телефона не меньше 300 рублей. Какую минимальную сумму она должна положить в приёмное устройство данного терминала?



*Решение.*

*1-й способ.*

Составим неравенство. Если в терминал положить  $x$  рублей, то на счёт телефона пойдет  $x \cdot 0,93$  рублей, что по условию не меньше 300. Получаем  $x \cdot 0,93 \geq 300$ ,  $x \geq 322,5\dots$ . Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям, поэтому Маруся должна положить 330 рублей.

*2-й способ.*

7% от 300 — это  $300 \cdot 0,07 = 21$ . Получили, что терминал возьмет комиссию более 21 рубля. Проверим, хватит ли 330 рублей.  $330 - 330 \cdot 0,07 = 306,9$ , что больше 300. Значит, 330 рублей хватит.

*Ответ:* 330.

5. Масса холодильника 45 кг, а масса упаковки 3 кг 600 г. Найдите отношение массы холодильника к массе упаковки.

*Решение.*

3 кг 600 г = 3,6 кг. Отношение массы холодильника к массе упаковки равно  $\frac{45}{3,6} = \frac{450}{36} = \frac{50}{4} = 12,5$ .

*Ответ:* 12,5.

6. В стоимость путёвки входит проезд и проживание. Стоимость проезда — 5400 руб., а стоимость проживания — 30 600 руб. Какую часть от всей стоимости путёвки составляет проживание?

*Решение.*

Общая стоимость путёвки равна  $30\,600 + 5400 = 36\,000$  (руб.). Чтобы определить, какую часть от всей сто-

имости путёвки составляет проживание, найдём отношение стоимости проживания к общей стоимости:  $\frac{30\,600}{36\,000} = 0,85$ .

*Ответ:* 0,85.

7. Провод длиной 286 м разрезан на 5 кусков, длины которых относятся как 3 : 4 : 5 : 6 : 8. Найдите длину меньшего из полученных кусков.

*Решение.*

Пусть  $x$  м — длина одной части. Тогда длины полученных кусков провода соответственно равны  $3x$ ,  $4x$ ,  $5x$ ,  $6x$  и  $8x$ . Следовательно,  $3x + 4x + 5x + 6x + 8x = 286$ ;  $26x = 286$ ;  $x = 11$ ; 11 м приходится на одну часть. Следовательно, длина меньшего из полученных кусков проволоки равна  $3 \cdot 11 = 33$  (м).

*Ответ:* 33.

8. За 5 кг фруктов заплатили 820 рублей. Сколько следует заплатить за 3 кг таких фруктов?

*Решение.*

Пусть 3 кг фруктов стоят  $x$  рублей. Тогда, согласно условию,

5 кг — 820 рублей,

3 кг —  $x$  рублей.

Так как стоимость товара **прямо пропорциональна** количеству товара, то справедливо равенство  $5 : 3 = 820 : x$ . По правилу нахождения крайнего члена пропорции находим

$$x = \frac{3 \cdot 820}{5} = 492.$$

3 кг фруктов стоят 492 рубля.

*Ответ:* 492.

9. С помощью 5 одинаковых труб бассейн заполняется водой за 48 минут. За сколько минут можно заполнить бассейн с помощью 8 таких труб?

*Решение.*

Пусть с помощью 8 труб бассейн можно заполнить за  $x$  минут. Тогда, согласно условию,

5 труб — 48 мин,

8 труб —  $x$  мин.

Так как время заполнения бассейна **обратно пропорционально** количеству труб, то справедливо равенство  $5 : 8 = x : 48$ . По правилу нахождения среднего члена про-

порции получаем  $x = \frac{5 \cdot 48}{8} = 30$ .

8 труб заполнят бассейн за 30 минут.

*Ответ:* 30.

### ① Немного полезной информации

1% — это  $\frac{1}{100}$  часть от целого, 25% — это  $\frac{25}{100} = 0,25$  от целого.

Процент от числа находится умножением.

Например, надо найти 20% от числа 250.

Делаем так:  $250 \cdot \frac{20}{100} = 50$ .

Число по его проценту находится делением.

Например, надо найти число, если 25% его составляет 35.

Делаем так:  $35 : \frac{25}{100} = \frac{35 \cdot 100}{25} = 140$ .

Чтобы найти, сколько процентов одно число составляет от другого, надо найти отношение этих чисел и результат умножить на 100%.

Например, надо найти, сколько процентов число 4 составляет от числа 8. Делаем так:  $\frac{4}{8} \cdot 100\% = 50\%$ .

**10.** Когда туристы прошли 35 километров, то оказалось, что пройденный путь составляет 20% от всего пути. Сколько километров составляет весь путь туристов?

*Решение.*

Пусть весь путь составляет  $x$  километров. Тогда

35 км — 20%,

$x$  км — 100%.

Из пропорции  $35 : x = 20 : 100$  находим

$x = \frac{35 \cdot 100}{20} = 175$ . Весь путь туристов — 175 километров.

*Ответ:* 175.

### **Задача на расчёт дохода по вкладу**

**11.** Клиент открыл в банке счёт и положил на срочный вклад 2000 рублей. Определите сумму вклада через 2 года, если банк начисляет ежегодно проценты по ставке 12% годовых и дополнительных вложений не поступало.

*Решение.*

Сумма в 2000 рублей, положенная на банковский счёт под 12% годовых, через год возрастёт до величины  $2000 \cdot 1,12 = 2240$  (рублей). Так как банк начисляет проценты ежегодно на имеющуюся сумму, то за второй год 12% будет

начисляться от суммы 2240 рублей, и, следовательно, сумма возрастёт до  $2240 \cdot 1,12 = 2508,8$  (рублей).

*Ответ:* 2508,8.

### Концентрация вещества

#### ① Немного полезной информации

Если  $m$  — масса раствора,  $p$  — концентрация вещества по массе, выраженная в процентах,  $x$  — масса чистого вещества,

$$\text{то } x = \frac{p}{100} \cdot m, \quad m = \frac{100x}{p}.$$

Например, если имеется 20 г раствора, содержащего 7% сахара, то сахара в растворе  $20 \cdot \frac{7}{100} = 1,4$  (г). Если имеется 50 г раствора, в котором 15 г чистого вещества, то концентрация чистого вещества в растворе равна  $\frac{15}{50} \cdot 100\% = 30\%$ .

12. Смешали два раствора уксуса: первый массой 200 г, второй — 300 г. Концентрация первого раствора 9%, второго — 12%. Какова концентрация полученного раствора?

*Решение.*

Концентрация первого раствора уксуса массой 200 г составляет 9%. То есть уксусной кислоты в этом растворе  $\frac{200 \cdot 9}{100} = 18$  (г).

Концентрация второго раствора уксуса массой 300 г составляет 12%. Это означает, что уксусной кислоты в этом растворе  $\frac{300 \cdot 12}{100} = 36$  (г).

После того как смешали два раствора, масса нового раствора составила  $200 + 300 = 500$  (г), а уксусной кислоты в этом растворе стало  $36 + 18 = 54$  (г). Концентрация составляет  $\frac{54}{500} \cdot 100\% = 10,8\%$ .

*Ответ:* 10,8.

13. Саша прочитала 40 страниц книги, что составило 20% от всех страниц этой книги. Сколько страниц в книге?

*Решение.*

В задаче необходимо найти число всех страниц, значит, надо  $40 : \frac{20}{100} = \frac{40 \cdot 100}{20} = 200$  (с.).

*Ответ:* 200.

14. Диск с компьютерной игрой стоит 1500 рублей. Скидка в день распродажи равна 15%. Сколько стоит этот диск со скидкой в день распродажи?

*Решение.*

Стоимость данного диска без скидки составляет 100%, скидка равна 15%. Значит, стоимость диска со скидкой составляет  $100\% - 15\% = 85\%$  от цены без скидки. 85% — это 0,85 от 1500 рублей.

$1500 \cdot 0,85 = 1275$  рублей.

*Ответ:* 1275.

15. В аквариуме 30 мальков и 20 взрослых рыбок. Сколько процентов от всех обитателей аквариума составляют мальки?

*Решение.*

Всего в аквариуме  $30 + 20 = 50$  обитателей. Мальки составляют  $\frac{30}{50} \cdot 100\% = 60\%$  от всех обитателей аквариума.

*Ответ:* 60.

16. Билет на экскурсию для взрослого стоит 160 рублей. Стоимость билета для ребёнка до 10 лет составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 детей до 10 лет и 4-х взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

*Решение.*

Стоимость билета для ребёнка составляет 50% от 160 рублей, то есть  $160 \cdot 0,5 = 80$  рублей. 16 детских билетов по 80 рублей стоят  $80 \cdot 16 = 1280$  рублей. 4 взрослых билета по 160 рублей стоят  $160 \cdot 4 = 640$  рублей. Билеты на всю группу стоят  $1280 + 640 = 1920$  рублей.

*Ответ:* 1920.

17. За один день дорожная бригада в среднем ремонтирует 2% от всей протяжённости дороги. Сколько дней потребуется этой бригаде для ремонта всей дороги?

*Решение.*

Протяжённость всей дороги составляет 100%. За один день рабочие ремонтируют 2% от всей протяжённости дороги, значит, на ремонт всей дороги им потребуется  $\frac{100}{2} = 50$  дней.

*Ответ:* 50.

**?** *Варианты для самостоятельного решения***Вариант 1**

1. Земельный участок площадью 420 га засеян семенами кукурузы и пшеницы. Площади под посев относятся как 3 : 5 соответственно. Найдите, сколько гектаров площади отведено под кукурузу.
2. Стоимость билета в музей составляет 230 рублей. Школьникам предоставляется скидка 50%. Найдите, сколько рублей стоит посещение музея для группы из 18 школьников.
3. Каждый день во время конференции расходуется 80 пакетиков чая. Конференция длится 5 дней. Чай продается в пачках по 30 пакетиков. Сколько пачек нужно купить на все дни конференции?
4. В квартире, где проживает Виктор, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 июня счётчик показывал расход  $6156 \text{ м}^3$  воды, а 1 июля —  $6161 \text{ м}^3$ . Какую сумму должен заплатить Виктор за холодную воду за июнь, если цена  $1 \text{ м}^3$  холодной воды составляет 17 руб. 40 коп.? Ответ дайте в рублях.
5. Флакон шампуня стоит 210 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?
6. Магазин делает пенсионерам скидку на определённое количество процентов от цены покупки. Пакет ряженки стоит в магазине 45 рублей. Пенсионер заплатил за пакет ряженки 36 рублей. Сколько процентов составляет скидка для пенсионеров?



**Вариант 2**

1. Для получения мельхиора берут медь и никель в отношении 4 : 1. Найдите, сколько килограммов меди понадобится для получения 30 кг мельхиора.
2. Во время тестирования ученик из 24-х задач решил 18. Определите, сколько процентов составляют решённые задачи от общего числа задач теста.
3. В школьную библиотеку привезли новые учебники для 7–9 классов, по 125 штук для каждого класса. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 6 полок, на каждой полке помещается 20 учебников. Сколько шкафов можно полностью заполнить новыми учебниками?
4. Система навигации информирует экипаж самолёта о том, что полёт проходит на высоте 25 620 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.
5. Одна таблетка лекарства весит 15 мг и содержит 14% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 8 месяцев врач прописывает 0,6 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте семи месяцев и весом 7 кг в течение суток?
6. В августе 1 кг огурцов стоил 40 рублей, в сентябре огурцы подорожали на 10%, а в ноябре ещё на 50%. Сколько рублей стоил 1 кг огурцов после подорожания в ноябре?

**Вариант 3**

1. Для пайки изделий из жести применяют сплав олова и свинца в отношении 5 : 2. Сколько надо взять свинца, если весь сплав будет весить 294 г?
2. Рост Генри 6 футов 6 дюймов. Выразите рост Генри в сантиметрах, если 1 фут равен 0,305 м, а 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.
3. Таня С. отправила SMS-сообщения с новогодними поздравлениями 7 своим подругам. Стоимость одного SMS-сообщения 1 рубль 40 копеек. Перед отправкой сообщения на счету у Тани С. было 90 рублей. Сколько рублей останется у Тани С. после отправки всех сообщений?
4. Мобильный телефон стоил 2400 рублей. Через некоторое время цену на эту модель снизили до 2100 рублей. На сколько процентов была снижена цена?
5. При оплате услуг через платежный терминал взимается комиссия 9%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Маша хочет положить на счёт своего мобильного телефона не меньше 250 рублей. Какую минимальную сумму она должна положить в приёмное устройство данного терминала?
6. Для команды спортсменов купили партию спортивной обуви по цене 3100 руб. за пару. Сколько рублей стоит эта пара обуви в магазине, если наценка в магазине составляет 2%?

**Вариант 4**

1. Найдите массу малины в джеме весом 5 кг, если массовые доли ягод малины и смородины в джеме соответственно относятся как 3 : 1.
2. Клиент открыл в банке счёт и положил 20 000 рублей. Какая сумма будет у него на счёте через год, если банк начисляет 12% годовых?
3. Диагональ экрана телевизора равна 74 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах, если в одном дюйме 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.
4. На автозаправке Сергей отдал кассиру 1000 рублей и залил в бак 25 литров бензина по цене 31 руб. 40 коп. за литр. Сколько рублей сдачи он должен получить у кассира?
5. В квартире, где проживает Пахом Сергеевич, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 ноября счётчик показывал расход  $3513 \text{ м}^3$  воды, а 1 декабря —  $3518 \text{ м}^3$ . Какую сумму должен заплатить Пахом Сергеевич за холодную воду за ноябрь, если цена  $1 \text{ м}^3$  холодной воды составляет 115 руб.? Ответ дайте в рублях.
6. Карандаш стоит 12 рублей. Сколько рублей заплатит покупатель за 70 карандашей, если при покупке более 40 карандашей магазин делает скидку 10% от стоимости всей покупки?

**Вариант 5**

1. В классе 28 учеников, из них количество мальчиков относится к количеству девочек как 3 : 4. Сколько мальчиков в классе?
2. Найдите, сколько страниц в книге, если Петя прочитал 30 страниц, что составляет 6% от их общего числа.
3. Лыжник проехал 300 м за 6 секунд. Найдите среднюю скорость лыжника на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.
4. На счету маминого мобильного телефона было 255 рублей, а после разговора с сыном осталось 220 рублей. Сколько минут длился разговор с сыном, если одна минута разговора стоит 2 рубля 50 копеек?
5. 28 выпускников школы собираются учиться в технических вузах. Они составляют 40% от числа выпускников. Сколько в школе выпускников?
6. Розничная цена учебника 140 рублей, она на 25% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 5000 рублей?

**Вариант 6**

1. В корзине было 18 яблок двух видов: красных и зелёных. Количество красных яблок относится к количеству зелёных яблок как 4 : 5 соответственно. Найдите количество красных яблок.
2. В ювелирном изделии содержание золота составляет 75% от общей массы изделия. Найдите, сколько граммов золота содержится в изделии, если его общая масса 4 г.
3. В обменном пункте 1 гривна стоит 3 рубля 65 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на гривны и купили 3 кг персиков по цене 16 гривен за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.
4. В книге «Кухня для студентов» имеется рецепт гречневой каши. Для каши на 5 человек следует взять  $\frac{3}{10}$  пакета гречневой крупы. Сколько граммов крупы следует взять для каши, рассчитанной на 7 человек? Считайте, что 1 пакет равен 0,9 кг.
5. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Матвеевича равна 22500 рублей. Какую сумму он получит после вычета налога на доходы? Ответ дайте в рублях.
6. Одна таблетка лекарства весит 10 мг и содержит 30% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 4 лет врач прописывает 1,5 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте 3 лет и весом 14 кг в течение суток?

## Глава 13. Действия с формулами

### ☛ Задачи с решениями

1. В одной из фирм стоимость поездки такси (в рублях) рассчитывается по формуле  $C = 12(t - 5) + 130$ , где  $t$  — длительность поездки, выраженная в минутах ( $t > 5$ ). Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 17-минутной поездки.

*Решение.*

По условию длительность поездки  $t = 17$  мин. Рассчитаем стоимость этой поездки по формуле  $C = 12 \cdot (17 - 5) + 130 = 274$  (руб.).

*Ответ:* 274.

2. Путь, пройденный телом при свободном падении, вычисляется по формуле  $s = \frac{gt^2}{2}$ . Выразите из этой формулы время  $t$ .

*Решение.*

Умножив обе части данного равенства на 2 и разделив на  $g$ , получим  $\frac{2s}{g} = t^2$ . Далее извлечём из обеих частей равенства квадратный корень, получим  $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ .

*Ответ:*  $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ .

3. Из формулы площади трапеции  $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$  выразите длину основания  $a$ .

*Решение.*

Умножив обе части данного равенства на 2 и разделив на  $h$ , получим  $\frac{2S}{h} = a + b$ . Далее вычтем  $b$  из обеих частей

равенства, получим  $a = \frac{2S}{h} - b$ .

*Ответ:*  $a = \frac{2S}{h} - b$ .

### ❓ Варианты для самостоятельного решения

#### Вариант 1

1. В строительной фирме стоимость (в рублях) кирпичной кладки при строительстве фасада дачного дома рассчитывается по формуле  $C = 15\,200 + 5000 \cdot n$ , где  $n$  — число рядов кирпича. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость кирпичной кладки фасада из 25 рядов кирпича.

2. Из формулы суммы первых  $n$  членов арифметической прогрессии  $S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$  выразите количество членов  $n$ .

3. Из формулы площади круга  $S = \pi r^2$  выразите радиус  $r$ .

4. Автомобильный журнал определяет рейтинги автомобилей на основе показателей безопасности  $S$ , комфорта  $C$ , функциональности  $F$ , качества  $Q$  и дизайна  $D$ . Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг  $R$  вычисляется по формуле  $R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}$ . Вычис-

лите рейтинг автомобиля, которому эксперты дали следую-

щую оценку: показатель безопасности 4, комфорта 3, функциональности 4, качества 3 и дизайна 5.

### Вариант 2

1. Периметр параллелограмма  $P$  вычисляется по формуле  $P = 2(a + b)$ . Найдите длину большей стороны параллелограмма, если длина одной из сторон равна 4,5 см, а периметр равен 21 см. Ответ дайте в сантиметрах.

2. Из формулы площади трапеции  $S = \frac{a + b}{2} \cdot h$  выразите высоту  $h$ .

3. По формуле площади круга  $S = \frac{1}{4}\pi d^2$  выразите диаметр  $d$ .

4. Площадь ромба вычисляется по формуле  $S = \frac{1}{2}d_1d_2$  (где  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали ромба). Найдите площадь ромба (в см<sup>2</sup>), длины диагоналей которого равны 5 см и 3 см.

### Вариант 3

1. Из формулы  $\frac{a}{\sin \angle A} = 2R$  выразите  $a$ .

2. Из формулы закона Джоуля-Ленца  $Q = I^2Rt$  выразите силу тока  $I$ .

3. Из формулы кинетической энергии  $E = \frac{mv^2}{2}$  найдите скорость  $v$  (в м/с), если  $E = 56$  Дж,  $m = 7$  кг.

4. Рейтинговое агентство определяет рейтинг кофеварок. Рейтинг вычисляется на основе средней цены  $P$  и оценок



функциональности  $F$ , качества  $Q$  и дизайна  $D$ . Каждый отдельный показатель оценивается экспертами по 5-балльной шкале целыми числами от 1 до 5. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле  $R = 7(F + Q) + D + 0,02P$ . Экспертами были даны оценки каждого показателя для одной из моделей кофеварок: средняя цена 5200, оценки функциональности 4, качества 5 и дизайна 2. Определите, какой рейтинг имеет эта модель. В ответ запишите значение этого рейтинга.

### Вариант 4

1. Из формулы площади треугольника  $S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin \angle C$  выразите  $\sin \angle C$ .

2. Из формулы периода колебаний математического маятника  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  выразите длину маятника  $l$ .

3. Стоимость  $R$  кг гвоздей и  $N$  коробок шурупов с торговой надбавкой  $H\%$  рассчитывается по формуле  $C = (165R + 54N)(1 + 0,01H)$ . Посчитайте по этой формуле стоимость 12 кг гвоздей и 5 коробок шурупов с торговой надбавкой 20%.

4. Независимое агентство каждый месяц определяет рейтинги  $R$  новостных сайтов на основе показателей информативности  $In$ , оперативности  $Op$  и объективности  $Tr$  публикаций. Каждый отдельный показатель оценивается целыми числами от  $-5$  до 5. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле  $R = 25 \cdot \left( \frac{3In + Op + 2Tr}{5} + 1 \right)$ . Экспертами были даны оценки каждого показателя для одного из новостных сайтов: пока-

затель информативности 3, оперативности 1 и объективности –2. Определите рейтинг этого сайта.

### Вариант 5

1. Из формулы длины окружности  $l = 2\pi R$  выразите длину радиуса  $R$ .
2. Выразите радиус  $r$  внутренней окружности из формулы площади кольца  $S = \pi(R^2 - r^2)$ .
3. Для каменного фундамента необходимо 5 тонн природного камня и 8 мешков цемента. Стоимость материала для фундамента можно рассчитать по формуле  $C = 1520K + 320M + 200 + 5P$ , где  $K$  — число тонн природного камня,  $M$  — количество мешков цемента и  $P$  км — расстояние, на которое нужно доставить купленные материалы. Посчитайте по этой формуле стоимость материала для фундамента с доставкой на 30 км.
4. Стоимость свитера рассчитывается по формуле  $P = (3500 + 30K)(1 - 0,01 \cdot C)$ , где  $K$  — число упаковок шерсти, потраченных на изготовление свитера,  $C\%$  — сезонная скидка. Рассчитайте стоимость свитера, на который ушло 8 упаковок шерсти, если сезонная скидка составляет 20%.

## Глава 14. Теория вероятностей

### ① Немного полезной информации

**Случайным** называют событие, которое может произойти или не произойти (заранее предсказать невозможно) во время наблюдения или испытания.

Пусть при проведении испытания (бросание монеты или кубика, вытягивание экзаменационного билета и т. д.) всегда наступает один из  $n$  равновозможных исходов. Например, при подбрасывании монеты число всех исходов  $n$  равно 2, так как, кроме выпадения «решки» или «орла», других исходов быть не может. При броске игрального кубика возможны 6 исходов, так как на верхней грани кубика равновозможно появление любого из чисел от 1 до 6. Пусть также некоторому событию  $A$  благоприятствуют  $m$  исходов.

**Вероятностью события  $A$**  называется отношение числа благоприятных для этого события исходов к общему числу равновозможных исходов. Пишем  $P(A) = \frac{m}{n}$ .

Например, пусть событие  $A$  состоит в выпадении нечётного числа очков при броске кубика. Всего возможны 6 исходов: выпадение на верхней грани кубика 1, 2, 3, 4, 5, 6. При этом благоприятными для события  $A$  являются исходы с выпадением 1, 3, 5. Таким образом,  $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$ .

Заметим, что всегда выполняется двойное неравенство  $0 \leq m \leq n$ , поэтому вероятность любого события  $A$  лежит на отрезке  $[0; 1]$ , то есть  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

**8** *Задачи с решениями*

1. Из 1000 собранных на заводе телевизоров 5 штук бракованные. Эксперт проверяет один наугад выбранный телевизор из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемый телевизор окажется бракованным.

*Решение.*

При выборе телевизора наугад возможны 1000 исходов; событию  $A$  «выбранный телевизор бракованный» благоприятны 5 исходов. По определению вероятности

$$P(A) = \frac{5}{1000} = 0,005.$$

*Ответ:* 0,005.

2. В урне 9 красных, 6 жёлтых и 5 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется жёлтым?

*Решение.*

Общее число исходов равно числу шаров:  $9 + 6 + 5 = 20$ . Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно 6. Искомая вероятность равна

$$\frac{6}{20} = 0,3.$$

*Ответ:* 0,3.

**① Немного полезной информации**

События  $A$  и  $B$  называются **противоположными** друг другу, если любой исход благоприятен ровно для одного из них. Например, в рассмотренной задаче №1 событие «выбранный телевизор рабочий» является противоположным событию «выбранный телевизор бракованный».

Событие, противоположное событию  $A$ , обозначают  $\bar{A}$ . Из определения противоположных событий следует  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ , значит,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

### 8 — Задачи с решениями

3. Из 30 билетов, предлагаемых на экзамене, школьник может ответить только на 27. Какова вероятность того, что школьник не сможет ответить на наугад выбранный билет?

*1-й способ.*

Обозначим через  $A$  событие «школьник может ответить на билет». Тогда  $P(A) = \frac{27}{30} = 0,9$ . Вероятность противоположного события равна  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,9 = 0,1$ .

*2-й способ.*

Так как школьник может ответить на 27 билетов, то на 3 билета он ответить не может. Вероятность получить один из этих билетов равна  $\frac{3}{30} = 0,1$ .

*Ответ:* 0,1.

## Задачи для самостоятельного решения

### Вариант 1

1. Из 2000 собранных на заводе вентиляторов 6 штук бракованные. Эксперт проверяет один наугад выбранный вентилятор из этих 2000. Найдите вероятность того, что проверяемый вентилятор окажется бракованным.

2. В урне 5 красных, 12 жёлтых и 8 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что все 5 красных шаров остались в урне?

3. В соревнованиях по прыжкам в воду участвуют 50 спортсменов, из них 6 спортсменов из России. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий третьим, будет из России.

### Вариант 2

1. В тёмном шкафу лежат 50 носков, из них 14 носков зелёного цвета. Какова вероятность того, что вытасченный наощупь носок окажется зелёного цвета?

2. В учебнике 24 задачи по геометрии. Школьник не знает, как решить 6 из них. Учитель наугад выбирает из учебника задачу по геометрии и вызывает школьника к доске, предлагая решить эту задачу. Найдите вероятность того, что школьник знает, как решить предложенную задачу.

3. В концерте участвуют 4 певца из России, 3 — из Польши и 3 — из Финляндии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что последним будет выступать певец из России.

### Вариант 3

1. На детской карусели 20 мест, каждое сделано в виде какого-либо животного. Из этих мест только шесть сделаны в виде лошадки. Мальчик стоит рядом с работающей каруселью, которую остановят в некоторый заранее неизвестный момент. Найдите вероятность того, что после остановки ка-

русели ближайшее к мальчику место будет сделано в виде лошадки.

2. На подносе лежат 40 пирожков, из них только 4 с капустой. Вася наугад берёт с подноса один пирожок. Вася не любит капусту и хочет съесть пирожок с какой-либо другой начинкой. Какова вероятность того, что взятый мальчиком пирожок действительно окажется с другой начинкой?

3. В концерте участвуют 3 певца из России, 5 — из Польши и 2 — из Финляндии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что первым будет выступать певец из России.

#### Вариант 4

1. В урне 5 красных, 9 жёлтых, 4 синих и 2 зелёных шара. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что достали синий шар?

2. Для проведения лотереи было изготовлено 5000 билетов, из них 4975 билетов не содержат выигрыша. Какова вероятность получить выигрыш, если приобрести только один билет?

3. В соревнованиях по гимнастике участвуют 40 спортсменов, из них 8 спортсменов из России. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий шестым, будет из России.

#### Вариант 5

1. Школьник на экзамене по истории наугад вытягивает один из 30 билетов. Известно, что среди всех этих билетов 6 содержат вопрос, касающийся событий XIX века. Какова ве-

роятность того, что в вытянутом билете не будет вопроса по XIX веку?

2. Для проведения лотереи было изготовлено 4000 билетов, из них 16 билетов содержат выигрыш. Какова вероятность получить выигрыш, если приобрести только один билет?

3. В соревнованиях по метанию копья участвуют 10 спортсменов из России, 9 — из США и 6 — из Германии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий восьмым, будет из России.

### Вариант 6

1. Из 3000 собранных на заводе холодильников 6 штук бракованные. Эксперт проверяет один наугад выбранный холодильник из этих 3000. Найдите вероятность того, что проверяемый холодильник окажется бракованным.

2. На подносе лежат одинаковые на вид пирожки: 2 с творогом, 3 с капустой, 4 с картошкой, 1 с мясом. Какова вероятность того, что наугад взятый с подноса пирожок окажется с картошкой?

3. В соревнованиях по метанию копья участвуют 50 спортсменов, из них 7 спортсменов из России. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий вторым, будет из России.



## Глава 15. Статистика

### ① Немного полезной информации

**Статистика** — это отрасль знаний, изучающая общие вопросы сбора, измерения и анализа массовых данных. Математическая статистика занимается в основном анализом уже полученных данных.

Данные могут быть представлены графически, в виде ряда данных или в виде таблиц.

### Графическое представление информации

#### Круговые диаграммы

Круговая диаграмма отображает целое в виде круга, а вклад нескольких элементов данных — в виде секторов этого круга. Например, если в классе 30 человек, из которых 20 мальчиков и 10 девочек, то целое — это весь класс, мальчики — две трети целого и девочки — одна треть целого (см. рис. 363).

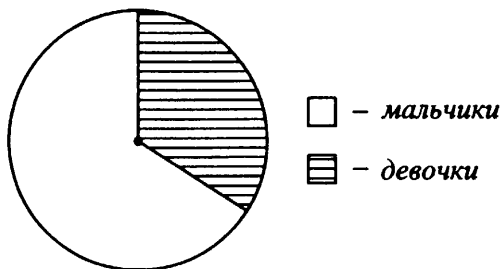


Рис. 363

Круговая диаграмма показывает долю каждой величины в общем объеме.

### 8 — Задачи с решениями

1. На диаграмме представлены длины крупнейших рек Европейской и Азиатской частей России (в тыс. км). Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Длина Дона больше длины Оби
- 2) Длина Волги составляет 4 тыс. км
- 3) Река Урал входит в семёрку крупнейших по длине рек Сибири
- 4) Длина Волги больше длины Амура

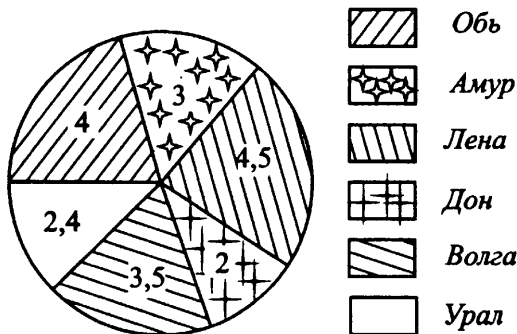


Рис. 364

*Решение.*

Сравнивая длины рек с помощью диаграммы, делаем вывод, что верным является только 4-е предложение, так как длина Волги приблизительно равна 3,5 тыс. км, а Амура — 3 тыс. км.

*Ответ:* 4.

2. Состав сплава массой 160 кг представлен на диаграмме (см. рис. 365). Сколько примерно олова содержится в этом сплаве?

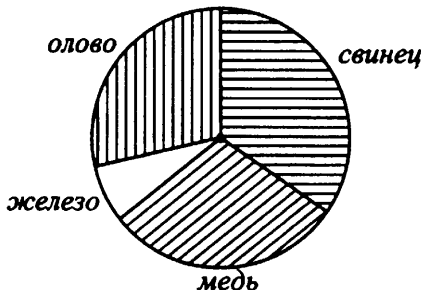


Рис. 365

- 1) более 80 кг                      2) около 40 кг  
3) менее 20 кг                    4) около 60 кг

*Решение.*

Как видно из рисунка, олово занимает примерно четверть круга, значит, верный ответ — около  $\frac{1}{4} \cdot 160 = 40$  (кг).

*Ответ: 2.*

3. На диаграмме показано содержание белков, жиров и углеводов в сгущённом молоке (см. рис. 366). Определите по диаграмме, содержание каких веществ превосходит 50%.

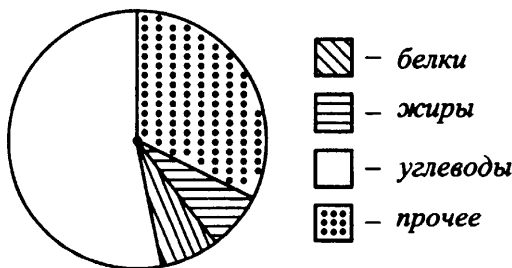


Рис. 366

- 1) белки                      2) жиры                      3) углеводы                      4) прочее

*Решение.*

Если содержание какого-то вещества более 50%, то соответствующий сектор должен занимать более половины круга. Как видно из рисунка, углеводы составляют более 50%.

*Ответ:* 3.

## ① Немного полезной информации

### Столбчатые диаграммы

Столбчатые диаграммы изображают статистические данные в виде вертикальных прямоугольников.

Предположим, в январе Красная шапочка принесла бабушке 15 пирожков, в феврале — 10 и в марте — 17. Представим эти данные в виде столбчатой диаграммы (см. рис. 367).

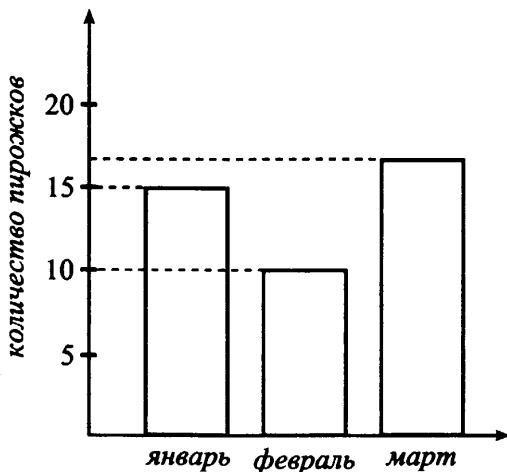


Рис. 367

Как видно из рисунка 367, для изображения величины какого-либо явления (в данном случае количества пирожков в каком-либо месяце) используется высота столбика.

### Задачи с решениями

4. На диаграмме (см. рис. 368) показано количество учащихся, прошедших тестирование по математике в некотором городе.

а) Определите номер школы, занявшей второе место по числу прошедших тестирование.

б) Определите, какое место по числу прошедших тестирование заняла 92-ая школа.

в) Определите, на сколько учеников больше прошли тестирование в школе 103, чем в школе 86.

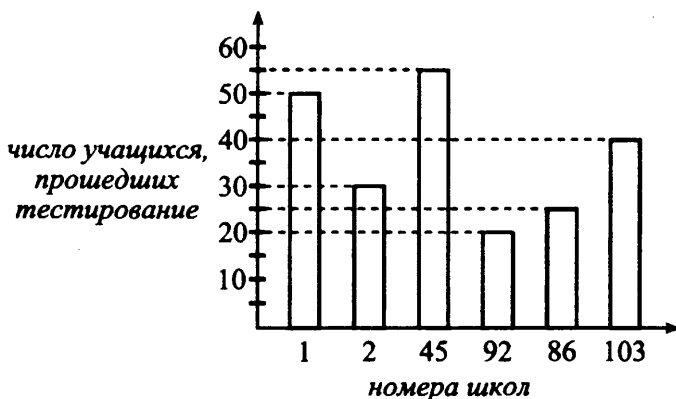


Рис. 368

*Решение.*

а) Как видно из рисунка 368, больше всех учеников (55 учеников) прошло тестирование в школе 45 (соответствующий этой школе столбик выше всех), следующая за ней школа — 1, в ней прошло тестирование 50 учеников.

б) Расположим количества учеников, соответствующих указанным школам, по убыванию: 55, 50, 40, 30, 25, 20. В

школе № 92 прошли тестирование 20 человек, значит, она на шестом месте.

в) Как видно из рисунка 368, в школе № 103 прошли тестирование 40 школьников, в школе № 86 — 25 школьников. Искомая разность равна  $40 - 25 = 15$ .

*Ответ:* а) 1; б) 6; в) 15.

## ① Немного полезной информации

### Ряд данных и таблица распределения данных

**Рядом данных** называют результаты измерения, перечисленные в порядке их получения. Каждый из результатов называется **вариантой** измерения.

Например, результаты написания контрольной работы по математике для класса из 20 человек можно представить в виде следующего ряда данных: 3, 4, 4, 5, 3, 4, 3, 3, 3, 5, 5, 4, 5, 4, 5, 3, 3, 3, 4, 3. Эту же информацию можно представить в

виде таблицы:

оценка	3	4	5
кратность	9	6	5

**Кратность варианты** — количество её повторений в ряду данных. В нашем ряду оценка «3» появилась 9 раз, поэтому её кратность равна 9.

Понятно, что таблица распределения отображает данные более наглядно и компактно.

### Числовые характеристики данных

**Объём измерения** — количество всех данных этого измерения. Одна из наиболее важных характеристик варианты — это её частота. Частота варианты показывает долю этой

варианты в ряду распределения. Она вычисляется по формуле  $\text{частота} = \frac{\text{кратность варианты}}{\text{объём измерения}}$ .

В нашем примере частота варианты «4» равна  $\frac{6}{20} = 0,3$ . Это означает, что оценка 4 составляет 0,3 всех полученных оценок.

**Размах измерения** — разность между максимальной и минимальной вариантами этого измерения. В нашем примере максимальная варианта равна 5, минимальная — 3, значит, размах равен  $5 - 3 = 2$ .

**Мода измерения** — варианта, которая в измерении встретилась чаще других. В приведённом выше примере чаще всех встретилась оценка 3, значит, она и будет модой этого распределения.

**Медиана распределения** — это центральное число в упорядоченном ряду данных, если в ряду нечётное количество чисел, или полусумма двух центральных, если в ряду чётное количество чисел.

Например, для ряда распределения 1, 2, 3, 6, 9, объём измерения которого равен 5, медианой распределения будет третье число этого ряда, то есть 3.

Для ряда распределения 7, 3, 2, 1 с объёмом измерения, равным 4, медианой будет полусумма двух центральных чисел данного ряда, то есть число, равное  $\frac{2 + 3}{2} = 2,5$ .

Для нахождения медианы распределения необходимо

1. Упорядочить ряд распределения по возрастанию или по убыванию:  $a_1, a_2, \dots$

2. Если объём измерения нечётный, то есть  $2n + 1$ , то получим следующую ситуацию:

$$\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}_{n \text{ значений}}, a_{n+1}, \underbrace{a_{n+2}, \dots, a_{2n+1}}_{n \text{ значений}}$$

В этом случае медианой является число  $a_{n+1}$ .

3. Если объём измерения чётный, то есть  $2n$ , то имеем

$$\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}_{n \text{ значений}}, \underbrace{a_{n+1}, \dots, a_{2n}}_{n \text{ значений}}$$

В этом случае медианой является число  $\frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ .

**Среднее ряда** (среднее арифметическое) — сумма всех чисел ряда, делённая на их количество. Если имеется таблица распределения, то можно

- 1) умножить каждую варианту на её кратность;
- 2) просуммировать полученные значения;
- 3) разделить результат на объём измерения.

Например, для ряда распределения 2, 4, 6, 8, у которого объём измерения равен 4, среднее значение равно

$$\frac{2 + 4 + 6 + 8}{4} = \frac{20}{4} = 5.$$

### ☞ Задачи с решениями

5. Даны результаты измерения веса школьников 9 класса:

55, 53, 56, 48, 45, 56, 49, 52, 53, 49, 50, 56, 45, 52, 56, 45, 45, 48, 55, 52, 43, 48, 52, 49, 50, 45, 48, 45, 50, 53.

а) Постройте таблицу распределения данных.



- б) Найдите объём измерения.  
 в) Найдите размах ряда.  
 г) Найдите частоту появления каждого веса в указанном ряду.  
 д) Найдите медиану, моду и среднее указанного ряда.

*Решение.*

а) Наименьшее число в ряду — 43, оно встречается в ряду один раз, значит, его кратность равна 1. Следующее по величине — число 45, оно встречается шесть раз, значит, его кратность равна 6. Далее 48, оно встречалось 4 раза, значит, его кратность равна 4.

Продолжая аналогично, заполним таблицу:

вес	43	45	48	49	50	52	53	55	56
кратность	1	6	4	3	3	4	3	2	4

- б) Найти объём измерения можем несколькими способами.

*1-й способ.*

Посчитаем количество чисел в ряду, получим 30.

*2-й способ.*

Сложим кратности всех вариантов:

$$1 + 6 + 4 + 3 + 3 + 4 + 3 + 2 + 4 = 30.$$

*Ответ:* 30.

- в) Наибольшее значение в ряду 56, наименьшее — 43, значит, размах равен  $56 - 43 = 13$ .

*Ответ:* 13.

- г) Для каждой варианты делим её кратность на объём измерения (на 30), результаты пишем в таблицу.

вес	43	45	48	49	50	52	53	55	56
кратность	1	6	4	3	3	4	3	2	4
частота	$\frac{1}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$

д) В данном ряду 30 чисел, значит, медиана равна полусумме 15-го и 16-го чисел в упорядоченном ряду.

$$\underbrace{43}_{1 \text{ штука}}, \underbrace{45, \dots, 45}_{6 \text{ штук}}, \underbrace{48, \dots, 48}_{4 \text{ штуки}}, \underbrace{49, \dots, 49}_{3 \text{ штуки}}, \underbrace{50, \dots, 50}_{3 \text{ штуки}}, \underbrace{52, \dots, 52}_{4 \text{ штуки}}$$

Как видно из такой записи чисел, от 43 до 49 — 14 чисел, значит, 15-ое и 16-ое числа равны 50, и значит, медиана равна

$$\frac{50 + 50}{2} = 50.$$

Мода — то значение, которое встречается чаще всех, то есть то, у которого больше кратность. Из таблицы распределения находим, что наибольшую кратность имеет число 45, значит, мода равна 45.

Для нахождения среднего необходимо найти сумму всех чисел ряда. Можно это сделать, просто складывая подряд все числа ряда. Можно поступить иначе: каждую варианту умножить на её кратность и сложить полученные результаты. Имеем:  $43 \cdot 1 + 45 \cdot 6 + 48 \cdot 4 + 49 \cdot 3 + 50 \cdot 3 + 52 \cdot 4 + 53 \cdot 3 + 55 \cdot 2 + 56 \cdot 4 = 1503$ .

Осталось разделить на количество всех чисел:

$$\frac{1503}{30} = 50,1.$$

**Ответ:** медиана: 50; мода: 45; среднее: 50,1.

6. Пятерых учеников попросили подсчитать, сколько времени (в минутах) они тратят на дорогу от дома до школы. Получили следующие результаты: 5, 15, 10, 15, 20.

1) На сколько среднее значение этого ряда меньше его размаха?

2) На сколько мода этого ряда больше медианы?

3) Найдите процентную частоту значения 10.

*Решение.*

1) Среднее ряда:  $\frac{5 + 15 + 10 + 15 + 20}{5} = 13$ , размах:

$20 - 5 = 15$ . Искомое значение равно  $15 - 13 = 2$ .

*Ответ:* 2.

2) Найдём медиану. Расположим числа в порядке возрастания: 5, 10, 15, 15, 20. Медианой этого набора будет третье число в упорядоченном ряду, то есть 15.

В данном ряду число 15 встретилось 2 раза, остальные — по одному разу. Мода ряда равна 15. Мода и медиана этого ряда равны, значит, ответ 0.

*Ответ:* 0.

3) Кратность значения 10 равна 1, объём измерения равен 5 (всего 5 чисел). Частота значения 10 равна  $\frac{1}{5} = 0,2$ , процентная частота равна  $0,2 \cdot 100\% = 20\%$ .

*Ответ:* 20.

7. Имеется 4 группы породистых котов. Для некоторого соревнования отбирают котов с длиной шерсти не менее 8 см.

Известно следующее:

1) в первой группе наибольшая длина шерсти равна 10 см;

- 2) во второй группе средняя длина шерсти равна 8 см;
- 3) в третьей группе мода длины шерсти равна 8 см;
- 4) в четвёртой группе медиана длины шерсти равна 9 см.

В какой из групп хотя бы половина котов гарантированно подходит по длине шерсти?

*Решение.*

1) Из того, что наибольшая длина шерсти равна 10 см, не следует никакой другой информации, то есть ничего не можем сказать про остальных котов этой группы.

2) Рассмотрим для примера группу котов с длинами шерсти 7 см, 7 см и 10 см. Среднее равно  $\frac{7 + 7 + 10}{3} = 8$ , но в этой группе нет половины котов, удовлетворяющих требованиям.

3) Рассмотрим для примера группу котов с шерстью длиной 8 см, 8 см, 7 см, 6 см, 5 см. Мода равна 8, но опять же нет половины котов, удовлетворяющих требованиям.

4) Если медиана равна 9 см, то есть половина котов с шерстью меньшей или равной длины и половина — с большей или равной длины. Значит, в этой группе найдётся половина котов с шерстью длиной не менее 8 см.

*Ответ:* 4.

8. По статистике автозавода из 1000 машин в среднем 20 бракованных. Сколько бракованных машин следует ожидать, если завод собирается выпустить 300 500 машин?

*Решение.*

Если из 1000 машин 20 бракованных, то частота появления бракованной машины равна  $\frac{20}{1000} = 0,02$ . То есть доля

бракованных машин будет равна 0,02, тогда из 300 500 машин будет  $300\,500 \cdot 0,02 = 6010$  бракованных.

*Ответ:* 6010.

## ❓ Варианты для самостоятельного решения

### Вариант 1

1. На диаграмме (см. рис. 369) показано распределение питательных веществ в сухом молоке.

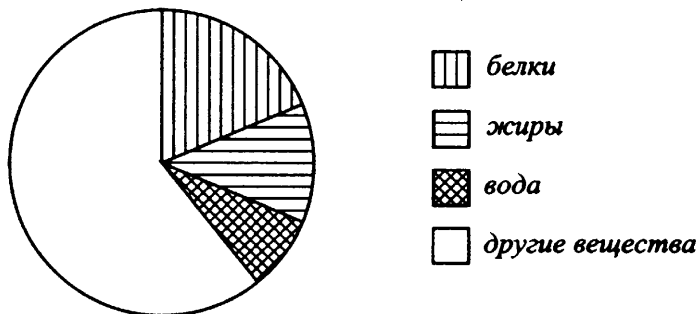


Рис. 369

Определите, сколько примерно белков содержится в 100 г сухого молока.

- |               |               |
|---------------|---------------|
| 1) более 65 г | 2) около 50 г |
| 3) около 35 г | 4) около 20 г |

2. Результаты контрольной работы по математике были представлены в виде ряда данных, по которому построена диаграмма (см. рис. 370).

Найдите среднее значение исходного ряда данных.



Рис. 370

3. Данные о числе мячей, забитых некоторой футбольной командой в разных матчах, представлены в виде ряда: 1, 2, 1, 0, 0, 3, 1, 2, 4, 0, 1, 0, 2, 1. Найдите моду этого ряда.

### Вариант 2

1. На диаграмме (см. рис. 371) показано распределение питательных веществ в изюме.

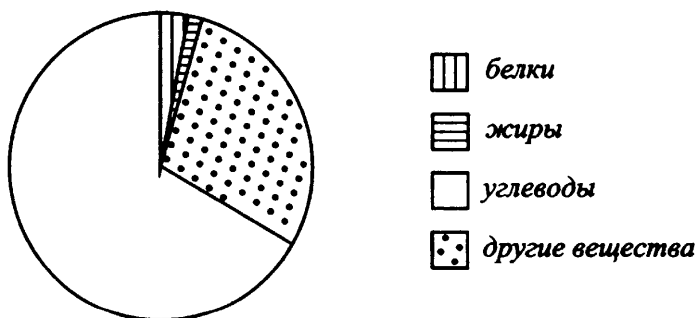


Рис. 371

Определите, сколько примерно углеводов содержится в 200 г изюма.

- |                |               |
|----------------|---------------|
| 1) более 120 г | 2) около 60 г |
| 3) около 30 г  | 4) менее 15 г |

2. Результаты контрольной работы по математике были представлены в виде ряда данных, по которому построена диаграмма (см. рис. 372).

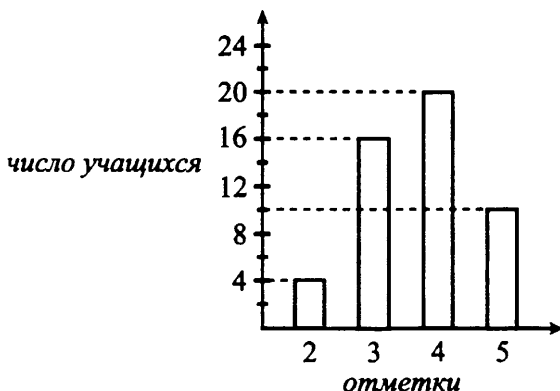


Рис. 372

Найдите разность между медианой и размахом исходного ряда данных.

3. Данные о числе мячей, забитых некоторой футбольной командой в разных матчах, представлены в виде ряда: 3, 1, 0, 2, 5, 1, 4, 0, 0, 1. Найдите среднее значение этого ряда.

### Вариант 3

1. На диаграмме (см. рис. 373) показано распределение лесных площадей в Брянской области.

Определите, сколько примерно процентов лесных площадей Брянской области занимает ельник.

1) более 40%

2) около 20%

3) около 5%

4) менее 2%

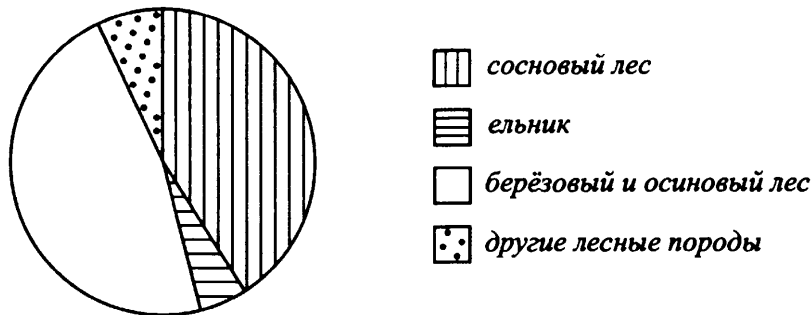


Рис. 373

2. Результаты сбора информации о зданиях некоторого посёлка были представлены в виде ряда данных, по которому построена диаграмма (см. рис. 374).

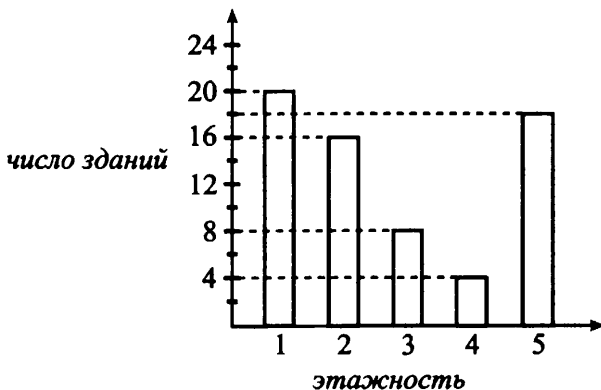


Рис. 374

Найдите разность между медианой и модой исходного ряда данных.

3. Данные о числе мячей, забитых некоторой футбольной командой в разных матчах, представлены в виде ряда: 3, 2, 2, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 1. Найдите объём измерения.



### Вариант 4

1. На диаграмме (см. рис. 375) показано распределение лесных площадей в Уржумском районе Кировской области.

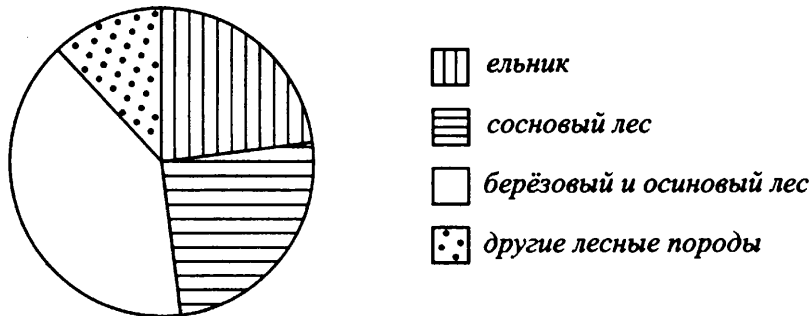


Рис. 375

Определите, сколько примерно процентов лесных площадей в Уржумском районе занимают сосновые леса.

- 1) более 30%                      2) около 25%
- 3) около 15%                     4) менее 10%

2. Результаты сбора информации о зданиях некоторого посёлка были представлены в виде ряда данных, по которому построена диаграмма (см. рис. 376).

Найдите разность между медианой и модой исходного ряда данных.

3. Данные о числе нерабочих праздничных дней в России по месяцам представлены в виде ряда: 6, 1, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0. Найдите среднее значение ряда.

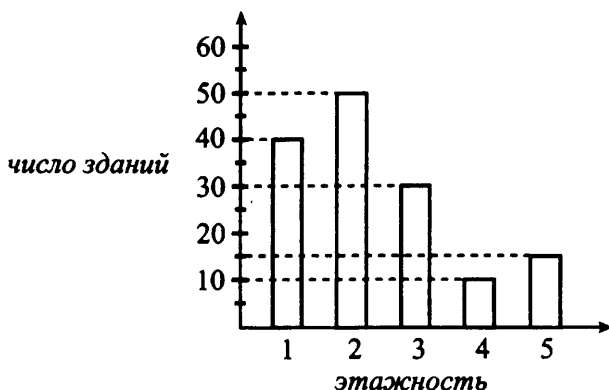


Рис. 376

### Вариант 5

1. Сплав Вуда состоит из олова, свинца, висмута и кадмия. На диаграмме (см. рис. 377) показано содержание металлов в этом сплаве.

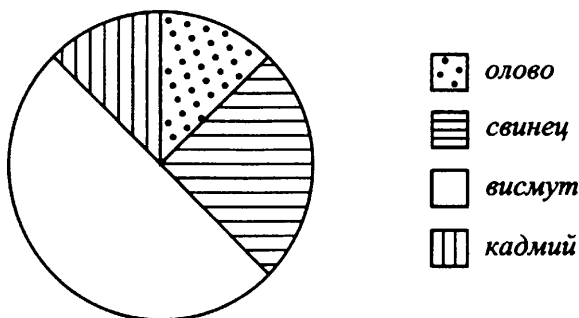


Рис. 377

Определите, сколько примерно граммов свинца в сплаве Вуда массой 600 г.

- 1) более 200 г
- 2) около 150 г
- 3) около 100 г
- 4) менее 80 г

2. Результаты измерения веса (в кг) школьников 9-го класса представлены в виде таблицы распределения.

вес	44	45	47	49	50	52	53	54	55
кратность	2	4	3	3	5	3	1	2	3

Найдите объём измерения.

3. Данные о числе нерабочих праздничных дней в России по месяцам представлены в виде ряда: 6, 1, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0. Найдите медиану ряда.

### Вариант 6

1. На диаграмме (см. рис. 378) показано содержание химических элементов в сплаве Тинидур (разновидность стали).

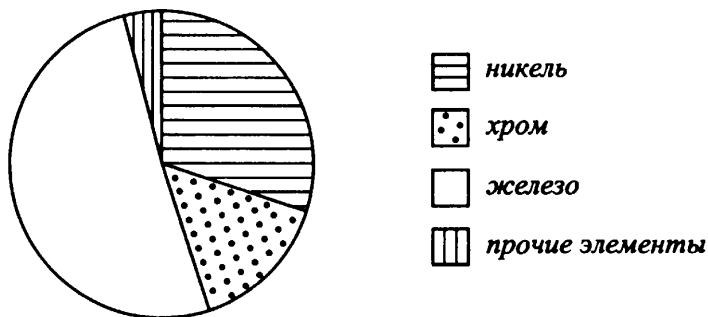


Рис. 378

Определите, сколько примерно граммов никеля в сплаве Тинидур массой 400 г.

- 1) около 200 г                      2) около 120 г  
 3) около 60 г                        4) менее 30 г

2. Результаты измерения веса (в кг) школьников 9-го класса были представлены в виде ряда, по которому построена таблица распределения.

вес	45	46	47	48	50	51	53	54	55
кратность	1	4	2	4	6	2	1	3	2

Найдите размах исходного ряда.

3. Данные о числе нерабочих праздничных дней в России по месяцам представлены в виде ряда: 6, 1, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0. Найдите моду этого ряда.

# Тренировочные тесты к модулю 3 «Реальная математика»

## Вариант 1

1. В первый день в парке посадили 55% всех кустов роз, а во второй — остальные 90 кустов. Сколько кустов роз посадили в парке за два дня?
2. Школьник на экзамене по географии наугад вытягивает один из 40 билетов. Известно, что среди всех этих билетов 6 содержат вопрос про Африку. Какова вероятность того, что в вытянутом билете не будет вопроса про Африку?
3. Из формулы давления столба жидкости  $p = \rho gh$  выразите плотность жидкости  $\rho$ .
4. В таблице приведены нормативы по бегу для мальчиков девятого класса.

Упражнения	Оценка		
	5	4	3
Бег 60 м	8,4 с	9,2 с	10,0 с
Бег 2000 м	9 мин 20 с	10 мин	11 мин
Кросс 3000 м	15 мин 30 с	16 мин 30 с	17 мин 30 с

Костя пробежал 2000 метров за 10 минут 30 секунд. Какую оценку он получил?

- 1) «5»
- 2) норматив не выполнен
- 3) «3»
- 4) «4»

5. На рисунке 379 показано изменение температуры воздуха в городе  $L$  на протяжении трёх суток. По горизонтали указано время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите наибольшее значение температуры 23 марта. Ответ укажите в градусах Цельсия.

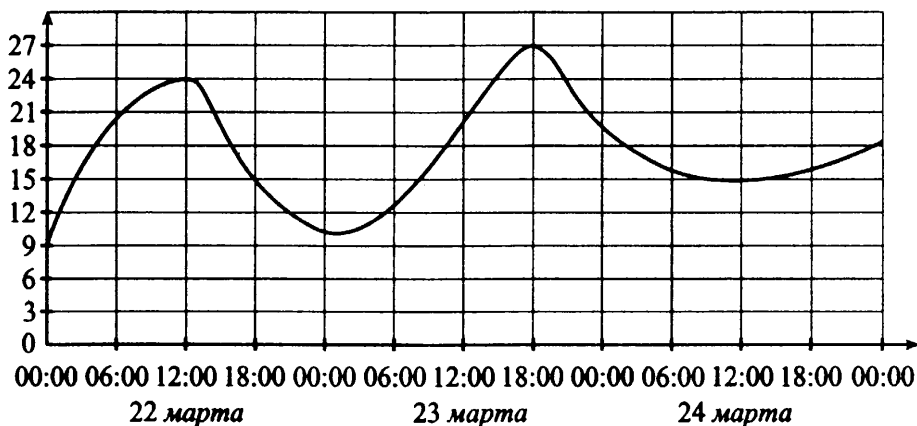


Рис. 379

6. Два дерева находятся на расстоянии 24-х метров друг от друга. Высота одного растения 22 метра, а другого — 12 метров. Найдите расстояние (в метрах) между их вершинами (см. рис. 380).

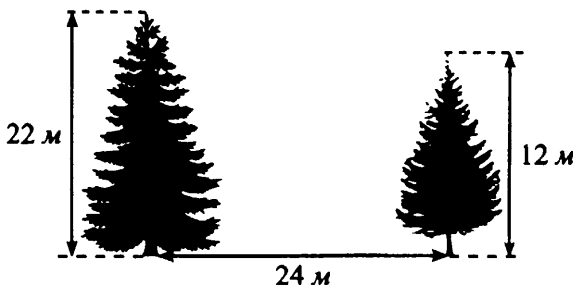


Рис. 380

7. Школьный библиотекарь систематизировал имеющиеся в школе издания. Результаты представлены на круговой диаграмме (см. рис. 381).

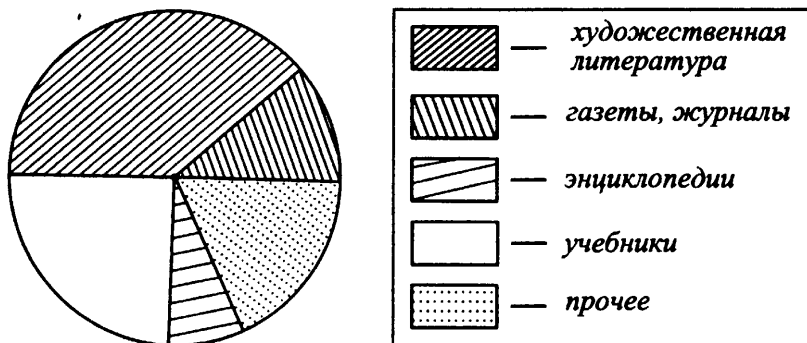


Рис. 381

Сколько примерно энциклопедий в школьной библиотеке, если всего в ней 4000 изданий?

- |               |              |
|---------------|--------------|
| 1) более 1000 | 2) около 300 |
| 3) менее 50   | 4) около 500 |

8. Стоимость костюма рассчитывается по формуле  $P = (1200 + 40k)(1 + 0,01c)$ , где  $k$  — число упаковок шерсти, потраченных на изготовление костюма,  $C\%$  — торговая наценка. Рассчитайте стоимость костюма, на который потратили 5 упаковок шерсти, если торговая наценка составляет 20%

### Вариант 2

1. В браслете массой 5 г содержится 58% чистого золота, а в цепочке массой 3,2 г — 75% чистого золота. На сколько граммов меньше золота в цепочке, чем в браслете?

2. На подносе лежат одинаковые на вид пирожки: 3 с творогом, 3 с капустой, 4 с картошкой, 5 с мясом. Какова вероятность того, что наугад взятый с подноса пирожок окажется с капустой?

3. Из формулы первой космической скорости  $v = \sqrt{gR}$  выразите радиус Земли  $R$ .

4. В таблице приведены нормативы по бегу для девочек девятого класса.

Упражнения	Оценка		
	5	4	3
Бег 60 м	9,4 с	10,0 с	10,5 с
Бег 2000 м	10 мин 20 с	12 мин	13 мин
Кросс 2000 м	11 мин 30 с	12 мин 30 с	13 мин 30 с

Надя пробежала кросс 2000 метров за 11 минут 35 секунд. Какую оценку она получила?

- 1) оценка «5»
- 2) оценка «4»
- 3) оценка «3»
- 4) норматив не выполнен

5. На рисунке 382 жирными точками показано изменение стоимости акций одной из туристических компаний в первые две недели октября. Для наглядности жирные точки соединены линией. По оси абсцисс отложены числа месяца, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях. Пётр купил 3 октября 300 акций, 100 акций продал 7 октября, 100 — 10 октября, а остальные — 11 октября. Сколько рублей потерял Пётр в результате этих операций?





Рис. 382

6. Угол раствора проектора равен  $60^\circ$ . На каком наименьшем расстоянии от проектора должен располагаться экран  $A$  высотой  $3\sqrt{3}$  м, чтобы он был полностью освещён? Ответ укажите в метрах (см. рис. 383).

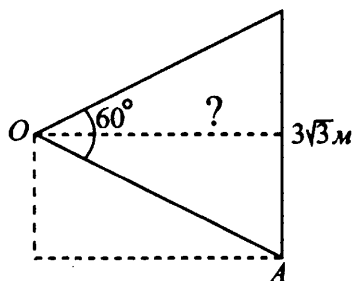


Рис. 383

7. Петя в 3-й четверти получил такие оценки: 3, 3, 4, 3, 5, 4, 3, 4, 5, 5, 3, 4. Найдите частоту варианты 5.

8. На диаграмме показано соотношение площадей фруктовых садов Придонья. Какое из утверждений относительно площадей фруктовых садов неверно?

- 1) Половину площадей занимают яблоневые и вишнёвые сады.
- 2) Более четверти площадей всех садов составляют виноградники.
- 3) Менее четверти площадей всех садов составляют сливовые сады.
- 4) Четверть всех садов составляют малинники и сливовые сады.

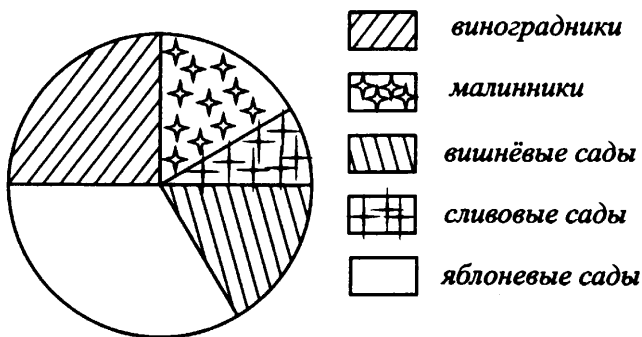


Рис. 384

### Вариант 3

1. Завод в апреле выпустил 750 велосипедов, 24% из которых — горные. В мае из 800 выпущенных велосипедов горные составили 22%. На сколько больше выпустили горных велосипедов в апреле, чем в мае?

2. Из 6000 собранных на заводе холодильников 9 штук бракованные. Эксперт проверяет один наугад выбранный холодильник из этих 6000. Найдите вероятность того, что проверяемый холодильник окажется бракованным.

3. Из формулы силы упругости  $F = -kx$  выразите смещение тела  $x$ .

4. В таблице приведены нормативы по прыжкам для мальчиков девятого класса.

Упражнения	Оценка		
	5	4	3
Прыжок в длину с разбега (см)	430	380	330
Прыжок в длину с места (см)	200	180	160

Коля прыгнул в длину с разбега на 390 см. Какую оценку он получил?

- 1) оценка «5»
- 2) оценка «4»
- 3) оценка «3»
- 4) норматив не выполнен

5. На графике, изображённом на рисунке 385, жирными точками показано изменение стоимости акций одной из строительных компаний с 1 по 19 августа. По оси абсцисс отложены числа месяца, по оси ординат — стоимость одной акции в евро. Для наглядности жирные точки соединены линией. Бизнесмен приобрёл 6 августа 300 акций, а 15 августа их продал. Сколько евро он приобрёл в результате этих операций?

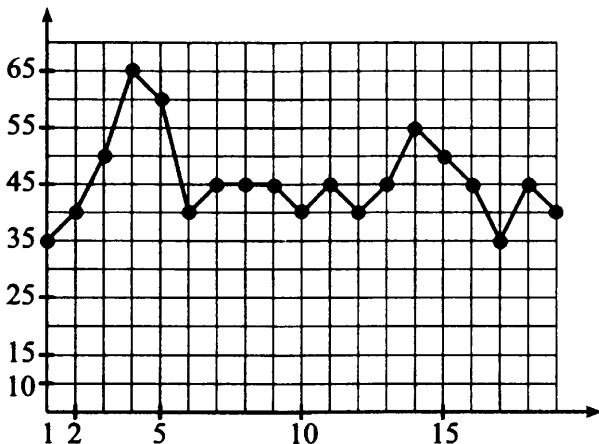


Рис. 385

6. Проектор полностью освещает экран  $A$  высотой 80 см, расположенный на расстоянии 30 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии от экрана  $A$  надо расположить экран  $B$  высотой 200 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными (см. рис. 386)? Ответ выразите в сантиметрах.

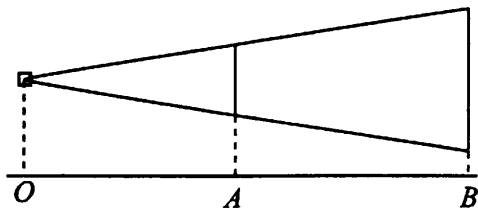


Рис. 386

7. Во вторник к школьному стоматологу пришли несколько учеников. Врач выписал в соответствующем порядке классы пациентов и получил такой список: 9, 9, 8, 7, 6, 7, 8, 8, 9, 6, 5, 6, 8, 5. Найдите разность между модой и медианой этого ряда.

8. На диаграмме показано распределение посевных площадей в одном из сельских хозяйств. Какое из утверждений неверно, если вся посевная площадь составляет 204 га?

- 1) Четверть всех посевных площадей занята рожью и кукурузой.
- 2) Под овёс и подсолнечник было отведено 100 га посевной площади.
- 3) Под пшеницу, рожь и кукурузу отведено 160 га.
- 4) Под подсолнечник в хозяйстве было отведено 40 га посевной площади.

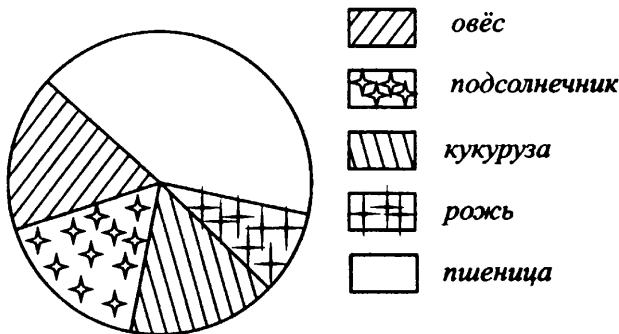


Рис. 387

### Вариант 4

1. В магазине имеется 1800 пакетов вишнёвого и сливового сока. Вишнёвый сок составляет 42%. Сколько пакетов сливового сока имеется в магазине?

2. В соревнованиях по шахматам участвуют 15 спортсменов из России, 10 — из США и 11 — из Германии. В первый день соревнований каждый шахматист играет одну партию, соперники определяются жеребьёвкой. Найдите вероятность того,

что шахматист из России Василий Кузнецов будет в первый день играть с другим россиянином.

3. Из формулы закона Джоуля-Ленца  $Q = I^2Rt$  выразите сопротивление  $R$ .

4. Дорожный знак, изображённый на рисунке 388, называется «Ограничение по весу». Его устанавливают там, где запрещён проезд по мосту транспортного средства (с грузом или без груза), превышающего установленный тоннаж. Какому из данных транспортных средств этот знак запрещает проезд?



Рис. 388

- 1) грузовику «ЗИЛ» грузоподъёмностью 5000 кг
  - 2) «Термофургону» грузоподъёмностью 15000 кг
  - 3) грузовику «МАЗ» грузоподъёмностью 20000 кг
  - 4) грузовику «Мерседес» грузоподъёмностью 18000 кг
5. На графике, изображённом на рисунке 389, показано изменение температуры воздуха в городе  $D$  в первые 4 дня июля. По горизонтали указывается время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры за этот период. Ответ укажите в градусах Цельсия.
6. Проектор полностью освещает экран  $B$  высотой 150 см, расположенный на расстоянии 2 м от проектора. На каком наименьшем расстоянии от проектора надо расположить экран  $A$  высотой 60 см, чтобы он был полностью

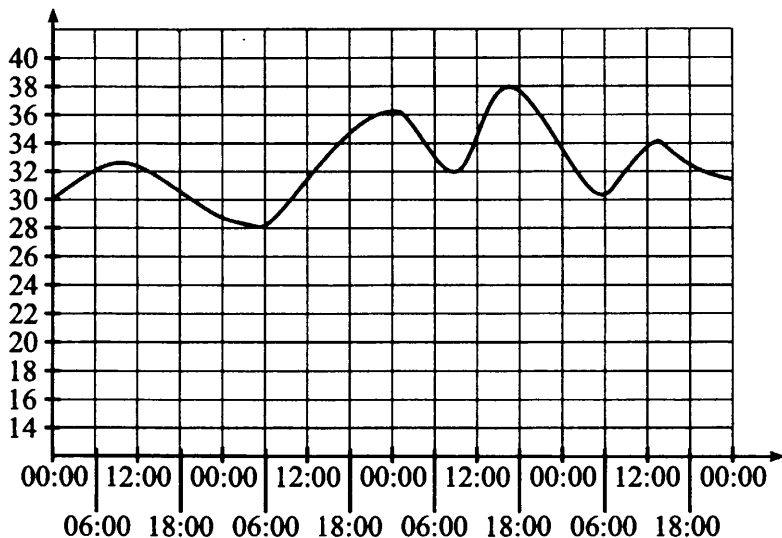


Рис. 389

освещён, если настройки проектора остаются неизменными (см. рис. 390)? Ответ укажите в сантиметрах.

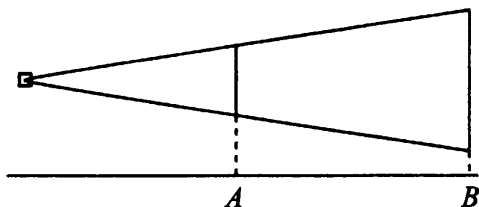


Рис. 390

7. В учебнике по географии 25 параграфов. Костя выписал на лист бумаги ряд данных, состоящий из объёмов параграфов в страницах. Полученные результаты он представил в виде таблицы распределения данных. Найдите среднее этого ряда.

Объём параграфа	9	7	6	5	1
Кратность	12	7	2	3	1

8. На диаграмме (см. рис. 391) показана среднемесячная температура воздуха в населённом пункте  $N$  за год. Укажите, сколько месяцев в году было с отрицательной среднемесячной температурой.

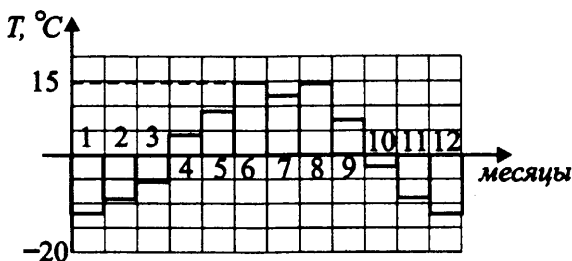


Рис. 391

### Вариант 5

1. В учебнике по математике содержится 40 задач на проценты и 28 задач на части. Сколько процентов составляют задачи на части от задач на проценты?
2. В концерте участвуют 9 певцов из России, 4 — из Франции и 2 — из Норвегии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что третьим будет выступать певец из России.
3. Из формулы площади треугольника  $S = \frac{1}{2}ab \sin \angle C$  выразите длину стороны  $b$ .
4. В таблице приведены нормативы по прыжкам для девочек.



Упражнения	Оценка		
	5	4	3
Прыжок в длину с разбега (см)	370	330	290
Прыжок в длину с места (см)	180	160	140

Катя прыгнула в длину с места на 163 см. Какую отметку она получила?

- 1) отметка «5»
- 2) отметка «4»
- 3) отметка «3»
- 4) норматив не выполнен

5. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, уменьшается со временем. На рисунке 392 эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса (в граммах) реагента, не вступившего в реакцию. Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за первые 5 минут.

6. Человек стоит на расстоянии 3 шагов от фонарного столба, высота которого 2,8 м. Рост человека — 1,6 м. Определите длину его тени (в шагах).

7. В книге по обществознанию цифры встречаются нечасто. Алексей выписал все цифры, которые встретились ему в тексте одного из параграфов. Он получил такую последовательность: 0, 2, 2, 1, 1, 2, 3, 7, 8, 1, 2, 7, 7, 0. Найдите разность между размахом ряда и его модой.

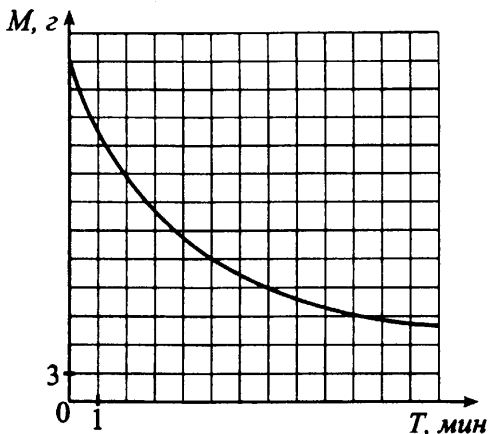


Рис. 392

8. Стоимость поездки в музей для группы туристов из  $K$  детей и  $B$  взрослых рассчитывается по формуле  $C = (200K + 350B) \cdot M$ , при этом  $M$  равно 0,5, если поездка в музей происходит на каникулах или в выходные дни, и 1 в остальных случаях. Рассчитайте стоимость поездки для группы из 8 детей и 2 взрослых, запланированной на воскресенье.

**Вариант 6**

1. Человек стоит на расстоянии 5 шагов от фонарного столба и отбрасывает тень длиной 15 шагов. Определите высоту фонарного столба (в метрах), если рост человека 1,8 м (см. рис. 393).

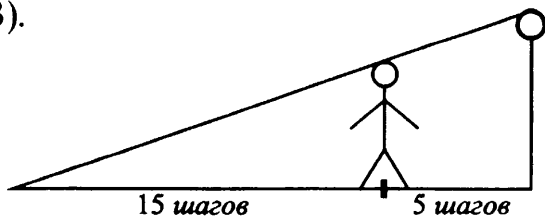


Рис. 393

2. Для покраски тканей используется смесь двух красителей белого и зелёного цветов в отношении 6 : 7. Какой процент в этой смеси составляет краситель белого цвета? Ответ округлите до целого числа.

3. Из формулы длины вектора  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$  выразите  $y$ , если известно, что  $y \geq 0$ .

4. На детской карусели 25 мест, каждое сделано в виде какого-либо животного. Из этих мест только три сделаны в виде слонёнка. Мальчик выбирает место наугад. Найдите вероятность того, что он сядет на место, сделанное в виде слонёнка.

5. В таблице приведены нормативы по метанию мяча для мальчиков 9-го класса.

Упражнения	Оценка		
	5	4	3
метание малого мяча 150 г (м)	45	40	31
метание набивного мяча (см)	695	530	430

Костя метнул набивной мяч на 690 см. Какую отметку он получил?

- 1) отметка «5»
- 2) отметка «4»
- 3) отметка «3»
- 4) норматив не выполнен

6. На рисунке 394 показано, как изменялась скорость движения легковой машины на протяжении пяти часов. По горизонтали указано время в часах, по вертикали — скорость

машины в км/ч. Найдите скорость машины через 2 часа после начала движения. Ответ выразите в км/ч.



Рис. 394

7. Найдите среднее арифметическое числового ряда: 18, 6, 24, 13, 21.

8. На круговой диаграмме (см. рис. 395) показано распределение обучающихся некоторой школы по классам.

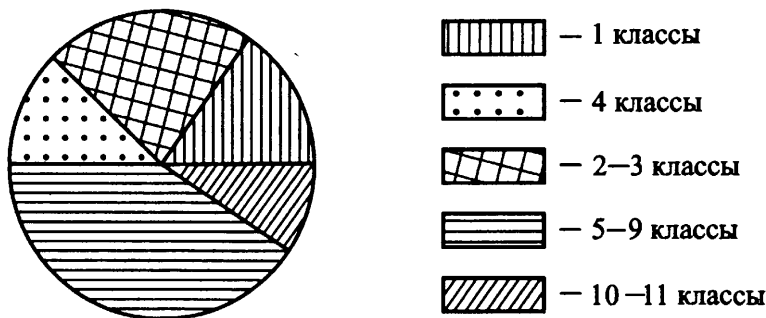


Рис. 395

Каково примерное количество обучающихся в 5–9 классах, если всего в школе 1100 обучающихся?

- 1) менее 100
- 2) около 150
- 3) более 300
- 4) около 250

### Вариант 7

1. Проектор полностью освещает экран  $A$  высотой 360 см, расположенный на расстоянии 150 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран  $B$  высотой 480 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными (см. рис. 396)?

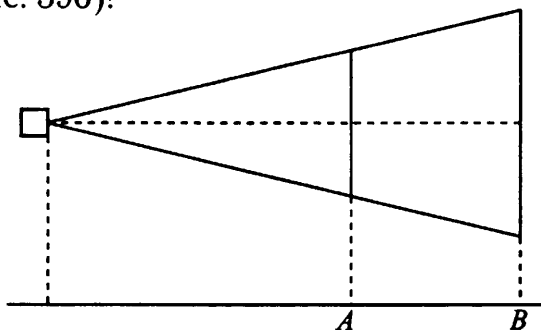


Рис. 396

2. Коллекция состоит из серебряных и золотых монет, собранных в отношении 8 : 1. Какой процент в этой коллекции составляют серебряные монеты? Ответ округлите до целого числа.

3. Из формулы закона Джоуля-Ленца  $Q = I^2 R t$  выразите время  $t$ .

4. В урне 6 красных, 8 жёлтых, 3 синих и 3 зелёных шара. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что достали жёлтый шар?

5. На соревнованиях по фигурному катанию за обязательную программу были выставлены баллы. Выпишите номера двух спортсменок, ставших победителями.

Номера участников	1	2	3	4	5
Результаты (баллы)	5,7	5,3	6,0	5,8	5,9

1) 1; 3

2) 2; 4

3) 3; 5

4) 3; 4

6. На рисунке 397 показана зависимость между сроком хранения и температурой молока. По горизонтали указана температура молока в градусах Цельсия, по вертикали — время в часах.



Рис. 397

Найдите срок хранения молока при температуре 10°C.

7. На круговой диаграмме (см. рис. 398) представлены данные туристической фирмы о продажах путёвок в различные страны за период лета 2009 года.

Какое примерное количество путёвок было продано в страны Скандинавии, если общее количество проданных путёвок за лето 2009 года составило 72 штуки?

1) около 10

2) около 30

3) около 20

4) более 40

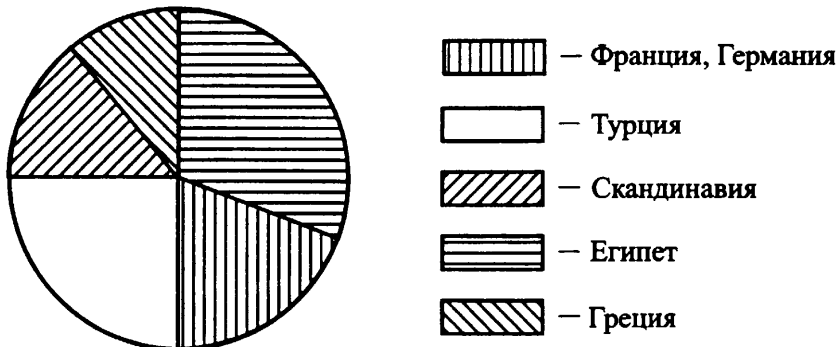


Рис. 398

8. В связи с закрытием магазина проводится распродажа кружек со скидкой 35%. Сколько кружек можно купить на 500 рублей в период распродажи, если до распродажи такая кружка стоила 58 рублей?

### Вариант 8

1. Человек стоит на расстоянии 3 метров от фонарного столба высотой 3,4 м и отбрасывает тень длиной 3 метра. Найдите рост (в метрах) человека (см. рис. 399).

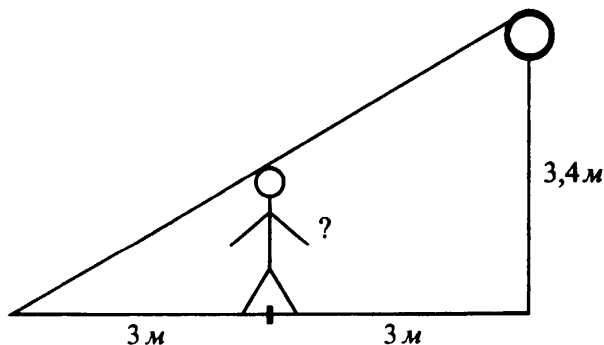


Рис. 399

2. Тетради в количестве 126 штук разделили между двумя классами в отношении 10 : 11. Сколько тетрадей составляет бóльшая часть?

3. Из формулы состояния идеального газа  $pV = RT$  выразите молярный объём  $V$ .

4. В учебнике 30 задач по физике. Школьник не знает, как решить 12 из них. Учитель наугад выбирает из учебника задачу по физике и вызывает школьника к доске, предлагая решить эту задачу. Найдите вероятность того, что школьник знает, как решить предложенную задачу.

5. В таблице приведены нормативы для мальчиков.

Упражнения (мальчики)	Оценка		
	5	4	3
поднимание туловища	50	45	35
подтягивание в висе	10	8	7

Пётр выполнил упражнение на поднимание туловища 49 раз. Какую отметку он получил?

- 1) отметка «5»
- 2) отметка «4»
- 3) отметка «3»
- 4) норматив не выполнен



6. На рисунке 400 показано, как изменялась температура воздуха на протяжении двух суток. На оси абсцисс отчается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите разность между наибольшей и наименьшей температурами в течение этих двух суток. Ответ дайте в градусах Цельсия.

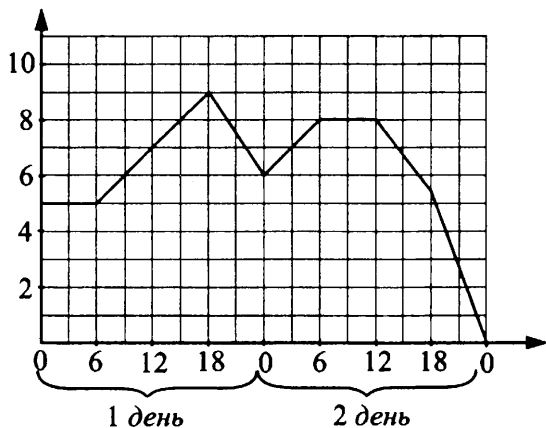


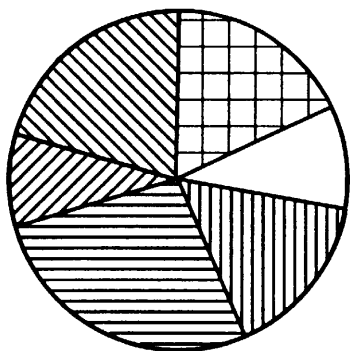
Рис. 400

7. У Анны Олеговны из зарплаты вычитают подоходный налог 13%. Сколько рублей получит Анна Олеговна, если ей начислили зарплату 12000 рублей?

8. На круговой диаграмме (см. рис. 401) представлены доли базовых общеобразовательных предметов в учебном плане старшей школы.

Сколько примерно часов в неделю отведено на изучение истории и обществознания, если недельный план составляет 37 часов?

- |             |             |
|-------------|-------------|
| 1) менее 5  | 2) около 10 |
| 3) около 15 | 4) более 20 |









-  — русский язык и литература
-  — математика
-  — физика
-  — история и обществознание
-  — химия и биология
-  — прочие предметы

Рис. 401

### Вариант 9

1. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 10 м от фонарного столба и отбрасывает тень длиной 5 м. Определите высоту фонарного столба в метрах (см. рис. 402).

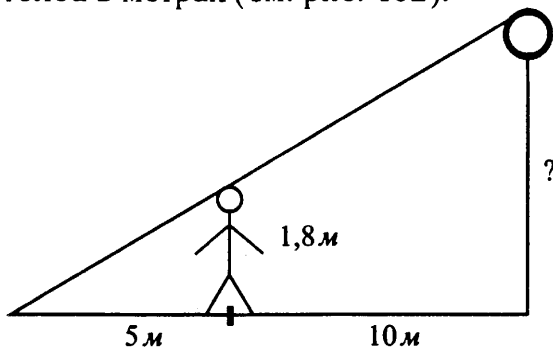


Рис. 402

2. В парке посадили клёны и липы, причём на каждые 3 липы приходилось 2 клёна. Сколько процентов от всех посаженных деревьев составили липы?

3. Из формулы скорости материальной точки при равноускоренном движении  $v = v_0 + at$  выразите время  $t$ .

4. В бассейне 8 дорожек, из них крайними являются 1-я и 8-я. В соревнованиях участвуют 8 пловцов, при этом дорожки распределяются жеребьёвкой. Определите вероятность того, что спортсмену Константину, участвующему в заплыве, достанется крайняя дорожка.

5. Дорожный знак, изображённый на рисунке 403, называется «Ограничение длины». Его устанавливают там, где запрещён проезд транспортного средства, габариты которого (с грузом или без груза) превышают установленную длину. Какому из транспортных средств этот знак запрещает проезд?



Рис. 403

- 1) рефрижератору «Пежо» длиной 2500 мм
- 2) рефрижератору «ЗИЛ» длиной 13 600 мм
- 3) рефрижератору «ГАЗ» (валдай) длиной 6500 мм
- 4) рефрижератору «МАЗ» длиной 10 200 мм

6. На рисунке 404 показано, как изменялась скорость движения легковой машины на протяжении пяти часов. По горизонтали указано время в часах, по вертикали — скорость машины в км/ч. Найдите скорость машины через 4 часа 20 минут после начала движения. Ответ выразите в км/ч.

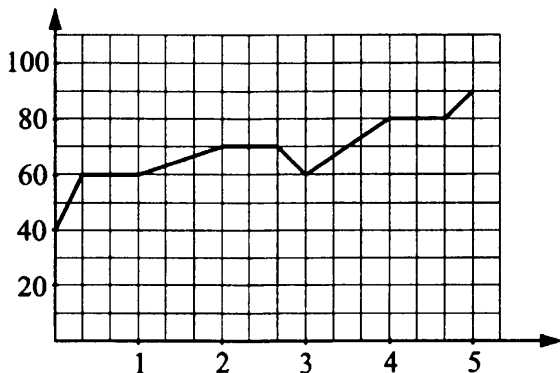


Рис. 404

7. Два дерева находятся на расстоянии 15 м друг от друга. Высота одного дерева 10 м, а другого — 2 м. Найдите, сколько метров составляет расстояние между их вершинами (см. рис. 405).

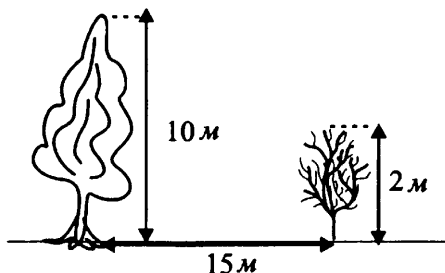


Рис. 405

8. На круговой диаграмме (см. рис. 406) представлены доли базовых общеобразовательных предметов в 10-м классе.

Сколько примерно часов в неделю отведено на изучение математики, если недельный план составляет 37 часов?

- 1) менее 7      2) около 10      3) около 15      4) более 20

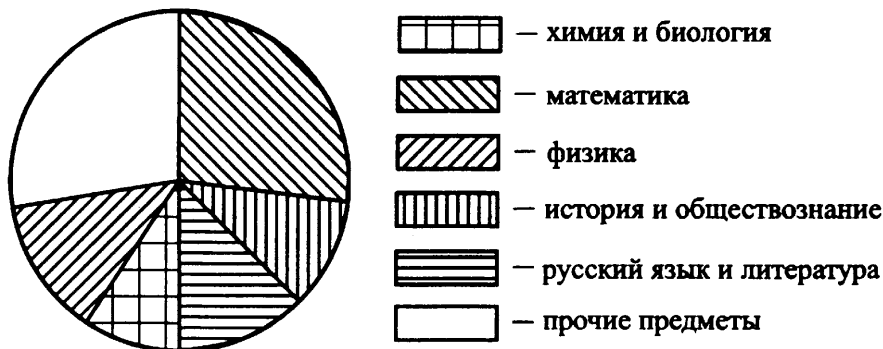


Рис. 406

### Вариант 10

1. В магазин завезли яблоки. В первый день продали 40% всех яблок, во второй день — остальные 1530 кг. Сколько килограммов яблок завезли в магазин?
2. Для проведения лотереи было изготовлено 2000 билетов, из них 1990 билетов не приносят выигрыша. Какова вероятность получить выигрыш, если приобрести только один билет?
3. Из формулы закона Архимеда  $F = \rho g V$  выразите объём тела  $V$ .
4. Дорожный знак, изображённый на рисунке 407, называется «Ограничение высоты». Его устанавливают там, где запрещён проезд транспортного средства, габариты которого (с грузом или без груза) превышают установленную высоту. Какому из транспортных средств этот знак запрещает проезд?



Рис. 407

- 1) еврофуре высотой 2750 мм
- 2) «Камаз» высотой 2600 мм
- 3) «ГАЗ» высотой 2650 мм
- 4) «ЗИЛ» высотой 2500 мм

5. На рисунке 408 показано, как изменялась температура воздуха в течение одного дня августа 2010 года в некотором городе. По горизонтали — время в часах, по вертикали — температура воздуха в градусах Цельсия. Определите по рисунку температуру воздуха (в градусах Цельсия) в 18.00.

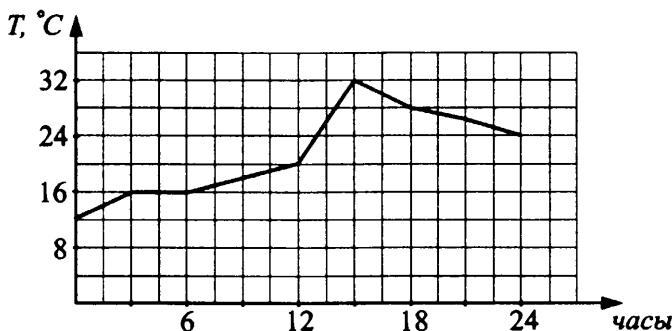


Рис. 408

6. На круговой диаграмме (см. рис. 409) представлено содержание питательных веществ в овсяных хлопьях.

Сколько примерно граммов белка содержится в 100 г овсяных хлопьев?

- 1) около 30
- 2) менее 5
- 3) около 15
- 4) более 25

7. Данные об оценках, полученных на контрольной по химии, представлены в виде ряда: 3, 4, 4, 2, 5, 3, 3, 4, 3, 3, 3. Найдите моду этого ряда.

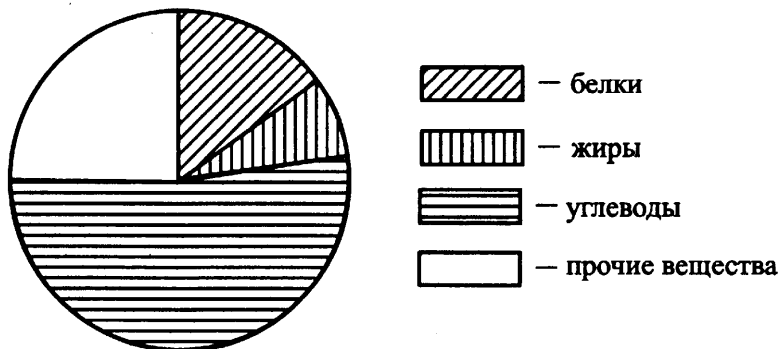


Рис. 409

8. Сколько плиток размером  $15\text{ см} \times 15\text{ см}$  нужно, чтобы выложить прямоугольное дно бассейна размером  $3\text{ м} \times 6\text{ м}$ ?

# Ответы к вариантам для самостоятельного решения

## Глава 1. Числа и вычисления

№	1	2	3	4	5	6	7
<b>Вар. 1</b>	11,447	$-\frac{7}{15}$	9	$7,377 \cdot 10^5$	38,1	5,09	3
<b>Вар. 2</b>	0,1	-0,25	$2\sqrt{3}$	$1,426 \cdot 10^5$	70,285	2,4	2
<b>Вар. 3</b>	10,253	$-9\frac{13}{70}$	2	$3 \cdot 10^4$	30,88	0,95	4
<b>Вар. 4</b>	14,599	110,08	1,5	$1,7 \cdot 10^5$	2,185	-19,6	3
<b>Вар. 5</b>	0	$\frac{2}{3}$	9	$2,53 \cdot 10^3$	70,285	19,7	3
<b>Вар. 6</b>	20	5,8	2	$2 \cdot 10^5$	18,25	19,6	4

## Глава 2. Алгебраические выражения

№	1	2	3	4	5
<b>Вар. 1</b>	3	$\frac{ac}{2}$	$x \geq 2$	2	3
<b>Вар. 2</b>	4	$\frac{n}{5m}$	$m \neq 2$	$(a - b)^2$	3
<b>Вар. 3</b>	-10	$9a^2$	$x \geq 4$	$\frac{(3x + y)^2}{3}$	2
<b>Вар. 4</b>	-11	$\frac{3}{b^9}$	$x \neq 2,$ $x \neq 3$	27,5	1
<b>Вар. 5</b>	-6	$\frac{2a^2b^2}{3}$	$a \leq 3$	11	3
<b>Вар. 6</b>	20	$\frac{3}{2y}$	$x > -5$	5	1



**Глава 3. Уравнения и неравенства**

№	1	2	3	4	5	6
<b>Вар. 1</b>	2	0,5	2	3	9	4
<b>Вар. 2</b>	-1	-2	4	6	3	4
<b>Вар. 3</b>	-10	-5	-8	3	13	4
<b>Вар. 4</b>	-16	2,5	1	4	2	3
<b>Вар. 5</b>	-5	-1,8	4	4	2	8
<b>Вар. 6</b>	-3	9	-15	-4	2	4

**Глава 4. Числовые последовательности**

№	1	2	3
<b>Вар. 1</b>	36	-65	728
<b>Вар. 2</b>	84	3	5
<b>Вар. 3</b>	3	-61	-2
<b>Вар. 4</b>	-100	96	0,5
<b>Вар. 5</b>	14	129	$5n - 3$
<b>Вар. 6</b>	-78	605	$\pm 96$

**Глава 5. Графики и функции**

№	1	2	3	4
<b>Вар. 1</b>	413	$(-2; -1)$	432	$(2; -2)$
<b>Вар. 2</b>	241	$(2; 3)$	3	$(-0,5; -2)$
<b>Вар. 3</b>	314	$(-1; -4)$	3	$(3; 1)$
<b>Вар. 4</b>	423	$(4; 0)$	213	$(-2; -3)$
<b>Вар. 5</b>	321	$(2; 9)$	2	$(-1; -3)$
<b>Вар. 6</b>	412	$(2; -5)$	134	$(-2; 1)$

### Глава 6. Базовые понятия и треугольник

№	1	2	3	4	5
Вар. 1	83	10	12	24	135
Вар. 2	103	26	24	15	135
Вар. 3	68	3, 4, 6	6	24	34
Вар. 4	10	8	14	2	12
Вар. 5	4	4, 5, 6	35	14	145
Вар. 6	2	16	48	20	245

### Глава 7. Многоугольники

№	1	2	3	4	5
Вар. 1	20	60	18	5	123
Вар. 2	12	60	69	1080	345
Вар. 3	70, 110	1	8	7	245
Вар. 4	3	40	11	150	124
Вар. 5	20	142	52	135	123
Вар. 6	44	5	14	162	245

## Глава 8. Окружность и круг

№	1	2	3	4	5
Вар. 1	28	5	11	0,125	124
Вар. 2	30	5	69	89	135
Вар. 3	70	4	18	1	125
Вар. 4	75	5	115	234	1235
Вар. 5	18	86	10	0,75	12
Вар. 6	41	160	87	$4\pi$	34

## Глава 9. Векторы и движение

№	1	2	3
Вар. 1	5	$\{-5; 1\}$	123
Вар. 2	10	$\{-8; -3\}$	135
Вар. 3	5	2	134
Вар. 4	13	3	23
Вар. 5	$\{9; -6\}$	$\{-3; 7\}$	135
Вар. 6	$\{2; 7\}$	$\{-2; 2\}$	235

**Глава 10. Графическое и табличное представление информации**

№	1	2	3	4
Вар. 1	20	9	3	2720
Вар. 2	3	5	120	500
Вар. 3	1	2	12	4
Вар. 4	3	2	54	1,5
Вар. 5	32200	80	18	66000
Вар. 6	1,2	30	2	4

**Глава 11. Практическая геометрия**

№	1	2	3	4
Вар. 1	13,2	27	0,8	600
Вар. 2	175	1,6	1,5	24
Вар. 3	6	0,6	7	50
Вар. 4	5,4	3,75	1,8	4,5
Вар. 5	240	7,1	1	41

## Глава 12. Текстовые задачи

№	1	2	3	4	5	6
Вар. 1	157,5	2070	14	87	6	20
Вар. 2	24	75	3	7814,1	2	66
Вар. 3	84	198	80,2	12,5	280	3162
Вар. 4	3,75	22 400	188	215	575	576
Вар. 5	12	500	180	14	70	44
Вар. 6	8	3	175	378	19575	7

## Глава 13. Действия с формулами

№	1	2	3	4
Вар. 1	140 200	$n = \frac{2S}{a_1 + a_n}$	$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$	0,74
Вар. 2	6	$h = \frac{2S}{a + b}$	$d = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}$	75
Вар. 3	$a = 2R \sin \angle A$	$I = \sqrt{\frac{Q}{Rt}}$	4	169
Вар. 4	$\sin \angle C = \frac{2S}{ab}$	$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$	2700	55
Вар. 5	$R = \frac{l}{2\pi}$	$r = \sqrt{R^2 - \frac{S}{\pi}}$	10 510	2992

### Глава 14. Теория вероятностей

№	1	2	3
<b>Вар. 1</b>	0,003	0,8	0,12
<b>Вар. 2</b>	0,28	0,75	0,4
<b>Вар. 3</b>	0,3	0,9	0,3
<b>Вар. 4</b>	0,2	0,005	0,2
<b>Вар. 5</b>	0,8	0,004	0,4
<b>Вар. 6</b>	0,002	0,4	0,14

### Глава 15. Статистика

№	1	2	3
<b>Вар. 1</b>	4	3,6	1
<b>Вар. 2</b>	1	1	1,7
<b>Вар. 3</b>	3	1	10
<b>Вар. 4</b>	2	0	1
<b>Вар. 5</b>	2	26	0,5
<b>Вар. 6</b>	2	10	0

## Ответы к тренировочным тестам

### Модуль 1 «Алгебра»

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>Вар. 1</b>	2	3	6 и 7	2	1,5	-2	75	321	(4; 12)	3
<b>Вар. 2</b>	4	2	5 и 6	6	0,75	$(1; +\infty)$	3	2	$(-2; -3)$	2
<b>Вар. 3</b>	142	1	$-\sqrt{245}$	-5	8	6	6	214	(2; 3)	3
<b>Вар. 4</b>	132	3	$-\sqrt{175}$	-2	7,5	5	-35	3	$(-1; 1)$	3
<b>Вар. 5</b>	2	4	3	3	10	11	18	412	$(-2; -4)$	3
<b>Вар. 6</b>	1	2	2	2	36	-5	162	243	(4; 7)	4
<b>Вар. 7</b>	3	2	3	6	27	0	2	214	$(-2; 4)$	1
<b>Вар. 8</b>	1	3	4	7	-10	-13	2	243	(1; 2)	2
<b>Вар. 9</b>	4	3	1,6	4	60	-3	1820	124	(2; -3)	1
<b>Вар. 10</b>	3	1	0,28	$-3; 1$	0,4	0	1	312	$(-1; 4)$	2

**Модуль 2 «Геометрия»**

<b>№</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
<b>Вар. 1</b>	106	2,5	-4	110	15	60	28	345
<b>Вар. 2</b>	40	40	-4	50	42	8	36	345
<b>Вар. 3</b>	140	48	2700	30	18	120	62	13
<b>Вар. 4</b>	40	36	9	72	6	4,5	216	34
<b>Вар. 5</b>	25	7	60	500	12	80	40	1245
<b>Вар. 6</b>	67,5	337,5	28	140	2	12	34	25
<b>Вар. 7</b>	106	20	36	32	3	5	40	135
<b>Вар. 8</b>	90	3	10	80	4,5	9	40	245
<b>Вар. 9</b>	105	39	3600	110	10	8	36	24
<b>Вар. 10</b>	8	45	0	100	128	6	78	135



## Модуль 3 «Реальная математика»

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Вар. 1	200	0,85	$\rho = \frac{p}{gh}$	3	27	26	2	1680
Вар. 2	0,5	0,2	$R = \frac{v^2}{g}$	2	600	4,5	0,25	2
Вар. 3	4	0,0015	$x = -\frac{F}{k}$	2	3000	45	0,5	2
Вар. 4	1044	0,4	$R = \frac{Q}{I^2 t}$	3	10	80	7,4	6
Вар. 5	70	0,6	$b = \frac{2S}{a \sin \angle C}$	2	21	4	6	1150
Вар. 6	2,4	46	$y = \sqrt{d^2 - x^2}$	0,12	2	70	16,4	3
Вар. 7	200	89	$t = \frac{Q}{I^2 R}$	0,4	3	12	1	13
Вар. 8	1,7	66	$V = \frac{RT}{p}$	0,6	2	9	10440	2
Вар. 9	5,4	60	$t = \frac{v - v_0}{a}$	0,25	2	80	17	2
Вар. 10	2550	0,005	$V = \frac{F}{\rho g}$	1	28	3	3	800

ОГЭ

Учебное издание

**Иванов** Сергей Олегович, **Войта** Елена Александровна,  
**Коннова** Елена Генриевна, **Нужа** Галина Леонтьевна,  
**Ольховая** Людмила Сергеевна, **Резникова** Нина Михайловна,  
**Ханин** Дмитрий Игоревич

**МАТЕМАТИКА.**  
**БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ОГЭ-2016.**  
**9 класс.**  
**ЭКСПРЕСС-ПОДГОТОВКА**

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *В. Кириченко*  
Компьютерная верстка *С. Иванов*  
Корректор *М. Гребенникова*

Подписано в печать с оригинал-макета 25.09.2015.  
Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типографская.  
Гарнитура Ньютон. Печать офсетная. Усл. печ. л. 22,32.  
**Доп. тираж 5 000. Заказ № 51.**

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009 зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»  
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.  
Адрес редакции: 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.  
[www.legionr.ru](http://www.legionr.ru) e-mail: [legionrus@legionrus.com](mailto:legionrus@legionrus.com)

Пособия издательства «Легион» можно приобрести у наших партнёров  
(полный список партнёров на сайте [www.legionr.ru](http://www.legionr.ru)):

Книги издательства «Легион» можно заказать в следующих интернет-магазинах:  
[www.legionr.ru](http://www.legionr.ru)

[www.ozon.ru](http://www.ozon.ru)  
[www.umlit.ru](http://www.umlit.ru)  
[www.labirint.ru](http://www.labirint.ru)  
[www.chitai-gorod.ru](http://www.chitai-gorod.ru)

#### **АБАКАН**

ГАОУ РХ ДПО «ХакИРОиПК»  
(3902) 22-70-12; 22-61-22  
«Кругозор Иванова и К»  
(3902) 22-36-40

#### **АНАПА**

ИП Ладанов И.А.  
(86133) 3-72-76; 3-28-79

#### **АРХАНГЕЛЬСК**

ООО «АВФ-книга»  
(8182) 20-70-80

#### **АСТРАХАНЬ**

ГАОУ АО ДПО «АИПКП»  
(851) 252-41-00; 8-905-360-15-66  
ИП Гасымов А.Р.  
(851) 225-79-18; 8-937-137-82-42

#### **БАРНАУЛ**

ИП Нестеренко Т.Н.  
(3852) 50-00-50; 50-00-51

#### **БЕЛГОРОД**

ИП Поляков А.М.  
(4722) 35-61-83; 8-904-096-93-25

#### **БЕЛЕБЕЙ**

ООО «Прогресс»  
(34786) 3-79-04

#### **БРЯНСК**

ИП Белкин Н.В.  
(4832) 67-68-40; 67-68-92  
ИП Трубка Н.З.  
(4832) 59-59-39; 8-919-199-33-33

#### **ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД**

ООО «Маркет Сервис»  
(8162) 62-35-69  
ООО «Прометей»  
(8162) 77-82-96; 77-30-21

#### **ВЛАДИМИР**

ИМЦ «Глобус»  
(4922) 38-02-58  
ИП Митина Л.Г.  
(4922) 47-09-01; 8-960-721-55-48  
ООО «Мир учебников»  
(4922) 32-47-43

ВИПКРО имени Л.И. Новиковой  
(4922) 45-12-01

#### **ВОЛГОГРАД**

ИП Гражданкин М.Н.  
(8442) 54-88-24; 54-88-34; 54-88-45  
ИП Гринин Л.Е.  
(8442) 42-17-71; 42-18-71; 42-15-24  
ООО «Кассандра»  
(8442) 97-58-00; 97-85-85; 97-55-55

#### **ВОЛОГДА**

ИП Дементьев А.В.  
(8172) 51-57-10  
ОАО «Источник»  
(8172) 72-42-38

#### **ВОРОНЕЖ**

ООО «Амиталь»  
(473) 224-24-90; 226-35-19; 226-35-60  
ООО «Риокса»  
(473) 221-08-66; 246-13-26; 246-43-94

#### **ГЕОРГИЕВСК**

ИП Филатов В.П.  
8-928-366-05-00

#### **ДЕРБЕНТ**

ИП Шисинов И.Ш.  
(87240) 4-35-00; 8-903-469-69-86

#### **ЕКАТЕРИНБУРГ**

ООО «Алис-Альянс»  
(343) 210-98-15; 257-45-23; 257-33-93  
ИП Носова А.А.  
(343) 228-10-70

#### **СТ. ЕССЕНТУКСКАЯ**

ИП Вечерук Е.В.  
(87961) 5-11-28

#### **ИВАНОВО**

ИМЦ «Глобус»  
(4932) 58-55-74  
ИП Ракова О.В.  
(4932) 49-12-34; 58-12-34  
АУ «ИРО Ивановской области»  
(4932) 38-48-25

#### **ИЖЕВСК**

ООО «Свиток»  
(3412) 78-22-24; 51-05-37

#### **ИРКУТСК**

ООО Книжный салон «Продалить»  
(3952) 24-17-77

#### **ЙОШКАР - ОЛА**

ИП Бессолицын В.С.  
(8362) 42-88-55; 63-01-25